Solution de l'exercice 1

1. Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'il existe $t \in I$ tel que $\phi(t) \geqslant \psi(t)$. Puisque $\phi(a) < \psi(a)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $t^* \in I$ tel que $\phi(t^*) = \psi(t^*)$. Ainsi, ψ et ϕ sont solutions du même problème de Cauchy,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& f(t,y) \\ y(t^*) &=& \phi(t^*) \end{array}\right. ,$$

et comme f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local (à savoir continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable), on peut l'appliquer et il y a unicité de la solution. Ainsi, $\psi \equiv \phi$. L'évaluation de cette égalité en a fournit une contradiction. Par suite, pour tout $t \in I$, $\phi(t) < \psi(t)$.

2.(a) C'est clair : ce sont des fonctions constantes, donc de dérivée nulle. De plus, puisque pour tout réel t, $f(t,0) = f(t,1) = 0$, on obtient le résultat.

2.(b) Soit $x_0 \in (0,1)$. L'application f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz local assure que le problème de Cauchy suivant admet une unique solution (J,x), avec J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, qui contient 0,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& f(t,x) \\ x(0) &=& x_0 \end{array}\right. .$$

2.(c) Par la question 2.(a), la fonction nulle est solution du problème de Cauchy sur J (car c'est la restriction d'une solution sur $\mathbb{R}$). De plus x est une autre solution du problème de Cauchy sur J, qui vérifie $0 < x_0 = x(0)$. On peut alors appliquer la question 1 et en déduire que pour tout $t \in J$, $0 < x(t)$. En raisonnant de même avec la solution constante égale à 1, on trouve l'inégalité demandée, *i.e.* pour tout $t \in J$, $0 < x(t) < 1$.

2.(d) On note $J = (T^-, T^+)$, avec $-\infty \leqslant T^- < 0 < T^+ \leqslant +\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que $T^+ < +\infty$. Alors, le théorème de sortie de tout compact affirme que :

$$\lim_{t \to (T^+)^-} \|x(t)\| = +\infty.$$

Ceci contredit l'inégalité obtenue à la question précédente. Par suite, $T^+ = +\infty$. De même, on montre que $T^- = -\infty$. Par suite, $J = \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2

1.(a) Soit $\alpha > 0$. On sait que, pour tout $x, y \in]\alpha; +\infty[$, par l'inégalité des acroissements finis, il existe $z_{x,y} \in]\alpha; +\infty[$ tel que

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{1}{2\sqrt{z_{x,y}}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Alors, la fonction racine est $k(\alpha) := \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$−lipschitzienne sur $]\alpha; +\infty[$.

1.(b) On suppose que $x \mapsto \sqrt{x}$ est localement lipschitzienne sur $[0; +\infty[$. Alors, pour tout $x_0 \in [0; +\infty[$, il existe $\mathcal{V}_{x_0} \subseteq [0; +\infty[$, et $L(x_0) > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \mathcal{V}_{x_0}$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant L(x_0)|x - y|.$$

En particulier, pour $x_0 = 0$, il existe $\mathcal{V}_0$, un ouvert (à droite) de 0 dans $\mathbb{R}^+$, tel que, pour tout $x, y \in \mathcal{V}_0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant L(0)|x - y|.$$

Soit $r > 0$ tel que $[0; r] \subset \mathcal{V}_0$. Alors, pour tout $x \in [0; r]$ (avec $y = 0$),

$$\sqrt{x} \leqslant L(0)x.$$

Donc, pour tout $x \in]0; r]$,

$$\frac{1}{L(0)} \leqslant \sqrt{x}.$$

Ceci est impossible, et montre le résultat.

2.(a) Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont pas vérifiées, puisque la fonction n'est pas continue en temps en 1. En effet, pour tout $y \in]\alpha; +\infty[$,

$$0 = \lim_{t \to 1^-} E(t)\sqrt{y} \neq \lim_{t \to 1^+} E(t)\sqrt{y} = \sqrt{y}$$

2.(b) Il convient de remarquer que, puisque $I = [0, 1[$, le champs de vecteurs est nul. Il est donc continue et localement lipschitzien et vérifie les hypothèses d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2.(c) Il convient de remarquer que, puisque $I = [n, n+1[$, le champs de vecteurs est :

$$f : (t, y) \in I \times U \mapsto n\sqrt{y} \in \mathbb{R}.$$

Il est donc continue et localement lipschitzien par rapport à la seconde variable (par la question 1.(a)). Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont donc vérifiées.

Solution de l'exercice 3

1. On vectorise le système différentiel pour se ramener au cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le système différentiel est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & f(t, X) \\ X(0) & = & {}^t(x_0, y_0) \end{array} \right. ,$$

avec

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & (3x - 4y + \cos(x)) - 1, 2x - 3y + \cos(x) - 1) \end{bmatrix}.$$

Il convient de remarquer que la fonction f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f(t, (x, y)) - f(t, (x', y'))\|_1 = |3(x - x') - 4(y - y') + \cos(x) - \cos(x')| + \\ |2(x - x') - 3(y - y') + \cos(x) - \cos(x')|.$$

Puisque la fonction cos est $1-$lipschitzienne, (car inégalité des accroissements finis, en remarquant que $\|\cos'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|-\sin\|_{\infty,\mathbb{R}} = 1$), il vient :

$$\|f(t, (x, y)) - f(t, (x', y'))\|_1 \leqslant 4|x - x'| + 4|y - y'| + 3|x - x'| + 3|y - y'|,$$

i.e.

$$\|f(t, (x, y)) - f(t, (x', y'))\|_1 \leqslant 7 \|(x, y) - (x', y')\|_1 .$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que le problème de Cauchy admet une unique solution globale.

2. L'équation différentielle est autonome. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + \cos(x) - 1 & = & 0 \\ 2x - 3y + \cos(x) - 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & y \\ \cos(x) & = & x+1 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1 - \cos(x)$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel,

$$g'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0,$$

et s'annule sur $I = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$. Puisque I est d'intérieur vide, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par suite, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Puisque 0 est solution, c'est l'unique solution. Alors,

$$f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & x \end{cases}.$$

Ceci montre que $(0,0)$ est l'unique point d'équilibre du système différentiel.

3. On remarque que :

$$\mathrm{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =: A.$$

Ainsi, $\chi_A(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Par conséquent, A admet $1 > 0$ pour valeur propre. Par le théorème de linéarisation de Lyapounov, le point d'équilibre $(0,0)$ est instable.

Solution de l'exercice 4

1. On vectorise l'équation pour se ramener à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Alors l'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} Y' & = & A(t)Y \\ Y(0) & = & \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

avec $A : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}$. Ce problème de Cauchy est donc d'un système linéaire, à coefficients continus (par hypothèse). Par le cours, cette équation admet une unique solution globale.

2. Par le théorème fondamental de l'analyse, V est dérivable. Ainsi, on peut dériver cette quantité, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}y'^2 + V\right)(t) = y'(t)y''(t) + q(t)y(t)y'(t) = y'(t)\left(y''(t) + q(t)y(t)\right) = 0,$$

puisque y est solution de l'EDO.

3. Par la question précédente, pour tout réel t,

$$V(t) + \frac{1}{2}y'^2(t) = V(0) + \frac{1}{2}y'^2(0) = \frac{1}{2}y_1^2.$$

Ainsi,

$$V(t) \leqslant \frac{1}{2}y_1^2.$$

Ceci montre que V est borné supérieurement.

4. On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par intégration par parties,

$$V(t) = \left[\frac{1}{2}q(s)y^2(s)\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) - \frac{1}{2}q(0)y^2(0) = \frac{1}{2}\int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s + V(t).$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de la question précédente, il vient :

$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) \leqslant \frac{1}{2}q(0)y_0^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}\int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s.$$

5. On note $C = \frac{1}{2}q(0)y_0^2 + \frac{1}{2}y_1^2$. Alors, l'inégalité de la question précédente s'écrit :

$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) \leqslant C + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}\left(\frac{1}{2}q(s)y^2(s)\right)\mathrm{d}s.$$

Remarquons que l'on peut diviser par q, car q est supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, comme q est croissante, $q' \geqslant 0$, et on peut appliquer le lemme de Grönwall à des fonctions continues et positives pour obtenir, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) \leqslant C\exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}\mathrm{d}s\right) = C\exp\left(\ln\left|\frac{q(t)}{q(0)}\right|\right) = C\frac{q(t)}{q(0)}.$$

Ainsi, puique q est à valeurs strictement positives, on peut diviser par cette quantité sans changer le sens de l'inégalité et obtenir, pour tout réel positif t,

$$y^2(t) \leqslant \frac{2C}{q(0)}.$$

Ceci montre que, pour tout réel positif t, $|y(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2C}{q(0)}}$. Ainsi, y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.