

Solution de l'exercice 1

1. On note $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto (y - f(x), -x) \end{cases}$. Alors,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} X'(t) &= F(X(t)) \\ X(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, F est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (forme locale), le système autonome (1) admet une unique solution maximale.

2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} y - f(x) &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= f(0) \\ x &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Ainsi, l'unique point d'équilibre du système (1) est $0_{\mathbb{R}^2}$. Étudions sa nature. Pour cela, on va appliquer le théorème de linéarisation. Remarquons premièrement que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. De plus,

$$A := \text{Jac}(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\det(A) = 1$ et $\text{tr}(A) = -f'(0)$. On distingue deux cas.

- (a) Si la matrice A admet deux valeurs propres réelles, λ_1 et λ_2 , alors $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 1 > 0$. Par suite, les valeurs propres sont non nulles et de même signe. Rappelons que $f'(0) \neq 0$.
 - i. Si $f'(0) > 0$, $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ et les valeurs propres sont strictement négatives.
 - ii. Si $f'(0) < 0$, $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et les valeurs propres sont strictement positives.
- (b) Si la matrice A admet deux valeurs propres complexes non réelles, elles sont conjuguées (car A est à coefficients réels). Notons les λ_1 et $\overline{\lambda}_1$. Alors, $\text{tr}(A) = 2\Re(\lambda_1) = 2\Re(\lambda_2)$.
 - i. Si $f'(0) > 0$, $\text{tr}(A) < 0$ et les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.
 - ii. Si $f'(0) < 0$, $\text{tr}(A) > 0$ et les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

Pour résumer :

- (a) Si $f'(0) > 0$, alors les valeurs propres sont de partie réelles strictement négatives. Par le théorème de linéarisation, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- (b) Si $f'(0) < 0$, alors les valeurs propres sont de partie réelles strictement positives. Par le théorème de linéarisation, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point d'équilibre instable.

3. Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(x(t), y(t))) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= -2f(x(t))x(t) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

par hypothèse. Par conséquent, $V(x, y)$ est décroissante sur I . Ainsi, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) \quad i.e. \quad \|(x(t), y(t))\|_2 \leq \|(x_0, y_0)\|_2.$$

Supposons que $\sup(I) < +\infty$. Par le théorème des bouts, $\lim_{t \rightarrow \sup(I)^-} \|(x(t), y(t))\|_2 = +\infty$. Ceci est une contradiction avec l'estimation précédente. Par suite, $\sup(I) = +\infty$ et les solutions sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

4. Dans cette question, (1) est un système linéaire à coefficients constants, que l'on peut réécrire $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) On a $\chi_A(X) = X^2 + X + 1$. Ainsi $\sigma(A) = \{j, \bar{j}\}$. De plus,

$$\ker(A - jI_2) = \ker \left(\begin{pmatrix} -1-j & 1 \\ -1 & -j \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2j \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left(t \in \mathbb{R} \mapsto \Re \left(\begin{pmatrix} -2j \\ 2 \end{pmatrix} e^{jt} \right) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \mapsto \Im \left(\begin{pmatrix} -2j \\ 2 \end{pmatrix} e^{jt} \right) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

i.e.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left(t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos + \sqrt{3} \sin \\ 2 \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} t, e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin - \sqrt{3} \cos \\ 2 \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} t \right).$$

(b) On détermine A dans une base adaptée au calcul de son exponentielle. Par définition,

$$A \begin{pmatrix} -2j \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2j \\ 2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{cases} Av_1 = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 \\ Av_2 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 \end{cases},$$

où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, après avoir identifié partie réelle et imaginaire. Alors,

$$A \underset{(v_1, v_2)}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad e^{tA} \underset{(v_1, v_2)}{\sim} e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) & \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ -\sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) & \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, si $(x_0, y_0) = \alpha v_1 + \beta v_2$, alors

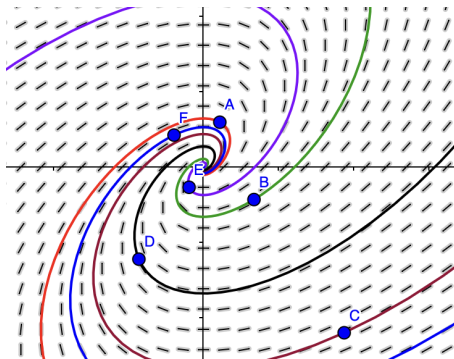
$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= e^{-t} \left((\alpha \cos + \beta \sin)^2 + (-\alpha \sin + \beta \cos)^2 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) e^{-t}. \end{aligned}$$

On obtient alors une spirale rentrante. Déterminons enfin son sens de rotation. On prend $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Alors

$$x(t) = e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \geq 0 \text{ quand } t \rightarrow 0,$$

$$y(t) = -e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \geq 0 \text{ quand } t \rightarrow 0^- \text{ et } \leq 0 \text{ quand } t \rightarrow 0^+.$$

On obtient finalement le portrait de phase suivant :



5. Dans ce cas, le champ F est globalement lipschitzien sur $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\|F(x, y) - F(x', y')\|_1 &= |y - y' - (f(x) - f(x'))| + |x' - x| \\ &\leq |y - y'| + |x - x'| + |f(x) - f(x')| \\ &\leq (k+1)|x - x'| + |y - y'| \\ &\leq (k+1)\|(x, y) - (x', y')\|_1,\end{aligned}$$

où k est une constante de Lipschitz associée à f sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, le théorème de Cauchy-Lipschitz (global) s'applique et le système (1) admet une unique solution globale. Alors, $I = \mathbb{R}$.

6. Montrons que le champ F est à croissance au plus linéaire. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|F(x, y)\|_1 = |y - x \cos(x)| + |-x| \leq |y| + 2|x| = \underbrace{2}_{=:C(t)} \times \|(x, y)\|_1,$$

et $C \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Ainsi, toute solution maximale est globale.

Solution de l'exercice 2

1. On note $F : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-y + \lambda(x^3 + xy^2), x + \lambda(y^3 + x^2y)) \end{bmatrix}$. Alors,

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} X'(t) &= F(X(t)) \\ X(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{où } X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De plus, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale donc F est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (forme locale), le système autonome (2) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle I , ouvert, contenant 0.

2. Il suffit de remarquer que $F(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
3. Soit $t \in I$. Alors,

$$\begin{aligned}R'(t) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= 2\lambda(x(t)^4 + 2x(t)^2y(t)^2 + y(t)^4) \\ &= 2\lambda(x(t)^2 + y(t)^2)^2 \\ &= 2\lambda R(t)^2\end{aligned}$$

Puisque $R(0) = x_0^2 + y_0^2$, l'application R est bien solution de (3).

4. Remarquons que $g : \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2\lambda z^2 \end{bmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz (forme locale) assure que (3) admet une unique solution maximale. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

- a. $\lambda > 0$. Soit

$$R : t \in \left] -\infty, \frac{1}{2\lambda(x_0^2 + y_0^2)} \right[\mapsto \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - 2\lambda(x_0^2 + y_0^2)t} \in \mathbb{R}.$$

Elle est solution du problème de Cauchy (3) et explose au borne de son intervalle de définition, i.e. $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2\lambda(x_0^2 + y_0^2)}^-} |R(t)| = +\infty$. Elle n'admet donc pas de prolongement continu. C'est

l'unique solution maximale de (3).

La solution n'est donc pas définie en tout temps positif : supposons que $\sup(I) \geq \frac{1}{\lambda(x_0^2 + y_0^2)}$. L'expression explicite du carré de la norme 2 de la solution mène à

$$\|(x(t), y(t))\|_2^2 = R(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{\lambda(x_0^2 + y_0^2)}^-]{} +\infty.$$

C'est impossible. Alors, $\sup(I) < \frac{1}{\lambda(x_0^2 + y_0^2)}$. Ceci valant pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, le point d'équilibre ne peut pas être stable (car la définition exige que la solution soit définie en tout temps positif pour des conditions initiales dans un voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$) ; il est donc instable.

b. $\lambda < 0$. Soit

$$R : t \in \left] \frac{1}{\lambda(x_0^2 + y_0^2)}, +\infty \right[\mapsto \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - \lambda(x_0^2 + y_0^2)t} \in \mathbb{R}.$$

Comme précédemment, il s'agit de l'unique solution maximale du problème de Cauchy (3). On suppose (par l'absurde) que $\sup(I) < +\infty$. Par le théorème des bouts,

$$\lim_{t \rightarrow \sup(I)^-} \|(x(t), y(t))\|_2 = +\infty.$$

C'est impossible car :

$$\|(x(t), y(t))\|_2^2 = R(t) \xrightarrow[t \rightarrow \sup(I)^-]{} R(\sup(I)) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - \lambda(x_0^2 + y_0^2)\sup(I)} < +\infty.$$

Ainsi, $\sup(I) = +\infty$ et la solution est définie pour tout temps positif, quelque soit la condition initiale (c'est le cas aussi pour $(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^2}$ puisque l'unique solution globale de (2) est la solution nulle). De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $X_0 \in \mathcal{B}(0, \delta := \varepsilon)$, la solution de (2) est définie sur $\mathbb{R}^+$ (comme vu précédemment) et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|(x(t), y(t))\|_2 = \sqrt{R(t)} = \frac{\|(x_0, y_0)\|_2}{\sqrt{1 - \lambda(x_0^2 + y_0^2)t}} \leq \|(x_0, y_0)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que le point d'équilibre $0_{\mathbb{R}^2}$ est stable. Il est asymptotiquement stable car, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (on aurait en fait besoin seulement que cette propriété ait lieu localement uniquement)

$$\|(x(t), y(t))\|_2 = \sqrt{R(t)} = \frac{\|(x_0, y_0)\|_2}{\sqrt{1 - \lambda(x_0^2 + y_0^2)t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

c. $\lambda = 0$. Dans ce cas, le système est linéaire et se réécrit $X' = AX$ où $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Alors, $\chi_A(X) = X^2 + 1$ et $\sigma(A) = \{\pm i\}$. Les valeurs propres sont donc de partie réelle nulle et non défectives (car simples). Par le critère de Routh, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point d'équilibre stable, non asymptotiquement stable.

5. Dans cet exemple, on a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\text{Jac}(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme vu précédemment, le spectre de cette matrice est $\{\pm i\}$: c'est précisément le cas dans lequel le Théorème de linéarisation ne permet pas de conclure. De plus, même si la nature du système linéarisé ne dépend pas de λ , c'est le cas pour le système non linéaire.

Solution de l'exercice 3

1. Calculons le membre de gauche. Comme la matrice $B = \text{Diag}(\lambda, \mu)$ est diagonale,

$$e^B = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant le membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda - \mu} (e^\lambda(B - \mu I) - e^\mu(B - \lambda I)) &= \frac{1}{\lambda - \mu} \left(e^\lambda \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - e^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Soit B une telle matrice. Alors, son polynôme caractéristique $\chi_B(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ est scindé à racines simples (car elles sont supposées distinctes) : elle est donc diagonalisable. Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P \text{Diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$. Par propriété de l'exponentielle matricielle,

$$e^B = P e^{\text{Diag}(\lambda, \mu)} P^{-1}.$$

On peut à présent appliquer l'égalité démontrée à la première question et

$$\begin{aligned}e^B &= P \left(\frac{1}{\lambda - \mu} (e^\lambda(\text{Diag}(\lambda, \mu) - \mu I) - e^\mu(\text{Diag}(\lambda, \mu) - \lambda I)) \right) P^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} (e^\lambda (P \text{Diag}(\lambda, \mu) P^{-1} - \mu P P^{-1}) - e^\mu (P \text{Diag}(\lambda, \mu) P^{-1} - \lambda P P^{-1})) \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} (e^\lambda (B - \mu I) - e^\mu (B - \lambda I)).\end{aligned}$$

Ceci conclut.

3. Calculons l'exponentielle de matrice de deux manières.

- (a) Première méthode : on applique l'égalité de la question 2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_{Bt}(X) = X^2 - 3tX + 2t^2 = (X - t)(X - 2t)$. Alors $\sigma(Bt) = \{t, 2t\}$. Les valeurs propres sont distinctes dès que $t \neq 0$ et l'égalité de la question 2 fournit, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}e^{Bt} &= \frac{1}{-t} \left(e^t \begin{pmatrix} 2t & 3t \\ -2t & -3t \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 3t & 3t \\ -2t & -2t \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & 3e^{2t} - 3e^t \\ 2e^t - 2e^{2t} & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cette relation est également vérifiée pour $t = 0$ car $e^{0B} = I$.

- (b) Deuxième méthode : on diagonalise B . On a vu que $\sigma(B) = \{1, 2\}$. Déterminons les vecteurs propres associés :

$$\ker(B - I_2) = \ker \left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\ker(B - 2I_2) = \ker \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP = \text{Diag}(1, 2)$. Ainsi, pour tout réel t ,

$$e^{Bt} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Après calculs, on obtient la même formule.