Équations Différentielles

CC numéro 3, le 06/05/2025. Durée 1h30

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 *(7 points)*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, on considère le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & y - f(x) \\ y' & = & -x \\ x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. . \tag{1}$$

1 Montrer que (1) admet une unique solution maximale.

2 Déterminer le(s) point(s) d'équilibre de (1). Préciser leur nature en fonction du signe de $f'(0)$.

3 Dans cette question, on suppose que $xf(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra considérer $V : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

4 Dans cette question, on suppose que $f(x) = x$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de (1).

(b) Tracer le portrait de phase associé au système.

5 On suppose désormais que f est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'intervalle d'existence des solutions maximales ?

6 Dans cette question, on suppose que $f(x) = x\cos(x)$. Montrer que les solutions sont globales.

Exercice 2 *(6 points)*

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & -y + \lambda\left(x^3 + xy^2\right) \\ y' & = & x + \lambda(y^3 + x^2 y) \\ x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

1 Montrer que le système différentiel (2) admet une unique solution maximale, définie sur I, un intervalle ouvert contenant 0.

2 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point d'équilibre de (2).

3 On définit $R : t \in I \mapsto x^2(t) + y^2(t) \in \mathbb{R}$. Montrer que R est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & 2\lambda z^2 \\ z(0) & = & x_0^2 + y_0^2 \end{array} \right. . \tag{3}$$

4 Résoudre l'équation (3). En déduire la nature du point d'équilibre $0_{\mathbb{R}^2}$ suivant la valeur de λ.

5 Appliquer le critère de linéarisation à cet exemple. Commenter.

Exercice 3 *(4 points)*

Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice réelle carrée de taille 2 ayant deux valeurs propres distinctes $\lambda \neq \mu$.

1 Dans cette question, on suppose que B est diagonale. Montrer que

$$e^B = \frac{1}{\lambda - \mu} \left(e^{\lambda}(B - \mu I) - e^{\mu}(B - \lambda I) \right),$$

où I est la matrice identité de taille 2.

2 Montrer que le résultat est vrai pour une matrice réelle carrée de taille 2 ayant deux valeurs propres distinctes.

3 Calculer de deux manières différentes e^{Bt} pour $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$.