Compléments de cours 2 - Agrégation externe Équations différentielles ordinaires :

Table des matières

1 Théorème de Hadamard-Levy

Définition 1.1 (Fonction propre)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Une application $f : E \to F$ est dite propre si, pour tout $K \subseteq F$, compact, $f^{-1}(K)$ est un compact de $(E\,\|\cdot\|_E)$.*

Exemple 1.2. *La fonction $x : \mathbb{R} \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 2 & sinon \end{array} \right.$ n'est pas propre puisque $f^{-1}([-1,1]) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.*

Proposition 1.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est propre ssi elle vérifie : $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.*

Démonstration. Supposons que f est propre. Si elle ne vérifie pas $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$. : il existe $A > 0$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_n\| \geqslant n$ et $|f(x_n)| \leqslant A$. Ainsi,

$$\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}([-A, A]),$$

qui est compact, donc bornée. Contradiction. **Réciproquement**, soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un compact. Alors, $f^{-1}(K)$ est fermé, par continuité de f. De plus, c'est un borné : si ce n'est pas le cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in f^{-1}(K)$ tel que $\|x_n\| \geqslant n$. Alors, par hypothèse de f, $|f(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est une contradiction, car $f(x_n) \in K$, borné. □

Corollary 1.4. *Les polynômes non constants sont des fonctions propres.*

Voici un prérequis :

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $\Omega_E \subset E$ un ouvert. Soient $f : \Omega_E \to F$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que, pour tout point $x \in \Omega_E$, $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{GL}(E, F)$. Alors, $f(\Omega_E)$ est un ouvert et la co-restriction $f : \Omega_E \to f(\Omega_E)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

Démonstration. Montrons que $f(\Omega_E)$ est ouvert : soit $y := f(x) \in f(\Omega_E)$; avec $x \in \Omega_E$. On sait par le théorème d'inversion locale, qu'il existe $\mathcal{V}$, voisinage ouvert de Ω_E contenant x, et $\mathcal{W} = f(\mathcal{V})$, voisinage ouvert de F contenant y, tel que, $f_{|\mathcal{V}} \to \mathcal{W}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Ainsi, $\mathcal{W} = f(\mathcal{V}) \subseteq f(\Omega_E)$ est un voisinage ouvert. La continuité de l'application inverse est évidente. □

Pour le théorème qui nous intéresse, on relaxe un peu les hypothèses, et on ne suppose plus f injective mais propre.

Théorème 1.6 (Hadamard-Levy). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$.*
2. *f est propre et vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est inversible.*

Démonstration. **Pour le sens direct**, il convient de remarquer que, f est nécessairement propre, puisque, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact comme image de K par la fonction continue f^{-1}. De plus, le théorème des fonctions composés appliqué à la relation $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = Id_{\mathbb{R}^n}.$$

Ainsi, $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Pour le sens réciproque, il convient de remarquer que le théorème d'inversion locale s'applique, et f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local. Il faut alors montrer que f est bijective pour conclure. On fixe $y \in \mathbb{R}^n$ et on veut montrer que cet élément possède un unique antécédent par f, *i.e.* $\mathrm{Card}(f^{-1}(\{y\})) = 1$. Quitte à poser $g = f - y$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on se ramène à étudier le nombre d'antécédents de 0 par f.

Étape 1 : $\mathrm{Card}(f^{-1}(\{0\})) \geqslant 1$. On considère :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & -df(x)^{-1}(f(x)) \end{array}.$$

Il est clair que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & F(y) \\ y(0) & = & q \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{1}$$

Au vu de la régularité de F, l'équation admet une unique solution maximale $y(\cdot, q)$ définie sur un intervalle ouvert dont on note $[0, T^*[$ la restriction aux temps positifs. Montrons que cette solution est globale. On pose $g : t \in [0, T^*[\mapsto f \circ y(t, q) \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\forall t \in [0, T^*[, \qquad g'(t) = \mathrm{d}f(y(t,q))(y'(t,q)) = -f \circ y(t,q) = -g(t).$$

Alors,

$$\forall t \in [0, T^*[, \qquad g(t) = f \circ y(t,q) = f(q)e^{-t}.$$

Ainsi, $\forall t \in [0, T^*[$, $y(t,q) \in f^{-1}\left(\overline{B(0, \|f(q)\|)}\right)$, qui est compact car f est propre. Par principe de majoration a priori, $T^* = +\infty$. Par compacité, il existe $y^* \in \mathbb{R}^n$ et $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tel que $t_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t_k, q) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y^*$. Alors,

$$f(y(t_k, q)) = g(t_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par continuité de f, il vient $f(y^*) = 0$.

Remarque 1.7. *Pourquoi avoir introduit une telle équation différentielle ? On cherche un 0 de f. Alors, on dimension 1, il convient de remarquer que :*

$$y' = -\frac{f(y)}{f'(y)}.$$

Une dérivée discrète de y danq cette équation différentielle donne :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}.$$

C'est la méthode de Newton, qui correspond bien à une recherche de 0 !

Étape 2 : Card$(f^{-1}(\{0\})) \leqslant 1$. Les équilibres de l'équation différentielle sont les zéros de f. Montrons qu'ils sont asymptotiquement stables. On applique le théorème d'inversion locale en y^* : il existe U_{y^*} un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y^*, et $\delta_{y^*} > 0$ tel que $f|_{U_{y^*}} : U_{y^*} \to B(0, \delta_{y^*})$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $y(t_0, q) \in U_{y^*}$. Alors, pour tout $t \geqslant t_0$, $y(t, q) \in U_{y^*}$. En effet,

$$\{t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t,q) \in U_{y^*}\} = \left\{t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t,q) = \left(f|_{U_{y^*}}\right)^{-1}\left(e^{-t} f(q)\right)\right\}.$$

(par décroissance de la norme de g). L'ensemble de gauche est ouvert, celui de droite est fermé, et il est non vide. Il est donc égal à $[t_0, +\infty[$ car connexité. Ainsi,

$$y(t,q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^*,$$

par unicité du zéro de f sur U_{y^*}. Concluons par un nouvel argument de connexité : pour $y^* \in f^{-1}(\{0\})$, on définit :

$$\mathcal{W}_{y^*} = \left\{q \in \mathbb{R}^n, \quad y(t,q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^*\right\}.$$

Alors,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y^* \in f^{-1}(\{0\})} \mathcal{W}_{y^*}.$$

Il reste à montrer que ce sont des ouverts, non vides, disjoints. Le caractère disjoint est évident, par unicité de la limite. Le fait que $y^* \in \mathcal{W}_{y^*}$ (point d'équilibre) assure que $\mathcal{W}_{y^*} \neq \emptyset$. Montrons qu'ils sont ouverts : on considère $\eta_{y^*} > 0$ tel que $B(y^*, 2\eta_{y^*}) \subseteq U_{y^*}$. Soit $q \in \mathcal{W}_{y^*}$, alors, il existe $T > 0$, tel que $y(T, q) \in B(y^*, \eta_{y^*})$. La continuité du flot par rapport à la donnée initiale assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|q - q'\| \leqslant \delta \Rightarrow \|y(T,q) - y(T,q')\| \leqslant \eta_{y^*}.$$

Ainsi, pour tout $q' \in B(y^*, \delta)$, par inégalité triangulaire,

$$\|y(T,q') - y^*\| \leqslant \|y(T,q) - y^*\| + \|y(T,q) - y(T,q')\| \leqslant 2\eta_{y^*}.$$

Alors, $y(T, q') \in B(y^*, 2\eta_{y^*}) \subseteq U_{y^*}$. Par ce qui a été fait avant, on a montré que : $y(t, q') \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^*$. Ainsi, $q' \in \mathcal{W}_{y^*}$ donc $B(q, \delta) \subseteq \mathcal{W}_{y^*}$. Ceci conclut, par convexité de $\mathbb{R}^n$. □

Remarques 1.8.
1. *Ce théorème reste vrai alors l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, mais, la preuve est différente.*
2. *Référence : C. Zuily et H. Queffelec, Elements d'analyse, 2ème édition – M. Zavidovique, Un max de maths.*

2 Vers la contrôlabilité des EDO..

2.1 Un premier critère de contrôlabilité

Cadre. *On considère $n, m \in \mathbb{N}$ deux entiers, $T_0 < T_1$ deux réels, $A \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, et on s'intéresse au système suivant :*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ pour } t \in [T_0, T_1], \tag{2}$$

où x désigne l'état du système et u, le contrôle de ce système.

Nous pouvons maintenant définir la notion de contrôlabilité d'un système linéaire.

Définition 2.1 (Contrôlabilité)**.** *Le système* (2) *est dit contrôlable sur* $[T_0, T_1]$ *si on a : pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in C^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ telle que l'unique solution x associée au problème de Cauchy* (2) *avec condition initiale $x(T_0) = x_0$ vérifie $x(T_1) = x_1$*

Définition 2.2 (Matrice gramienne)**.** *En notant $R(\cdot,\cdot)$ la résolvante associée à A, on appelle matrice gramienne associée au système (2) la matrice*

$$\mathfrak{S} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathrm{d}s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.3. *La matrice gramienne est symétrique positive.*

Démonstration. La matrice est clairement symétrique ; en effet :

$${}^t\mathfrak{S} = {}^t\left(\int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathrm{d}s\right) = \int_{T_0}^{T_1} {}^t\left(R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\right)\mathrm{d}s = \mathfrak{S}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(x|\mathfrak{S}x)_{2,\mathbb{R}^n} = {}^tx\mathfrak{S}x = \int_{T_0}^{T_1} {}^txR(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)x\mathrm{d}s.$$

$$(x|\mathfrak{S}x)_{2,\mathbb{R}^n} = \int_{T_0}^{T_1} \left({}^tB(s)^tR(T_1,s)x|{}^tB(s)^tR(T_1,s)x\right)_{2,\mathbb{R}^m}\mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1} \left\|{}^tB(s)^tR(T_1,s)x\right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2\mathrm{d}s \geqslant 0.$$

□

Théorème 2.4 (Critère de contrôlabilité)**.** *Le système* (2) *est contrôlable sur* $[T_0,T_1]$ *ssi la matrice gramienne associée au système est inversible.*

Démonstration. Supposons que la matrice gramienne est inversible. Montrons que le système (2) est contrôlable sur $[T_0,T_1]$; on considère $(x_0,x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, un état initial et une cible et définissons $\bar{u} : t \in (T_0,T_1) \mapsto {}^tB(t)^tR(T_1,t)\mathfrak{S}^{-1}(x_1 - R(T_1,T_0)x_0) \in \mathbb{R}^m$. Cette application est clairement $\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$. Montrons qu'elle permet d'amener la solution de x_0 à x_1 : par la formule de Duhamel, l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$\forall t \in [T_0,T_1],\ x(T_1) = R(T_1,T_0)x_0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathfrak{S}^{-1}(x_1 - R(T_1,T_0)x_0)\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [T_0,T_1],\ x(T_1) = R(T_1,T_0)x_0 + \underbrace{\left(\int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathrm{d}s\right)}_{=\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}(x_1 - R(T_1,T_0)x_0).$$

On obtient donc $x(T_1) = x_1$, ce qui conclut.

Réciproquement, on suppose que la matrice gramienne n'est pas inversible. Soit $y \in \ker(\mathfrak{S}) \setminus \{0\}$. Ainsi,

$${}^ty\mathfrak{S}y = \int_{T_0}^{T_1} \left\|{}^tyR(T_1,s)B(s)\right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2\mathrm{d}s = 0.$$

Par suite, $t \in [T_0,T_1] \mapsto {}^tyR(T_1,t)B(t)$ est nulle. Soit $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$ un contrôle quelconque, et x l'unique solution du problème de Cauchy issue de $x_0 = 0$. Alors,

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s.$$

De cette égalité, on obtient :

$$(y, x(T_1))_{2,\mathbb{R}^n} = 0,$$

ceci valant quelque soit le contrôle. On ne peut donc pas trouver de contrôle $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$ amenant la solution de $x_0 = 0$ à $x_1 = y$ puisque y est non nul. □

2.2 Un exemple

Exemple 2.5. *On considère le système* $\begin{cases} x_1' &= -\sin(t)x_3 \\ x_2' &= \cos(t)x_3 \\ x_3' &= u \end{cases}$*. Ce système est-il contrôlable sur* $[0, 2\pi]$ *? Il se met sous la forme* (2) *avec* $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Puisque la matrice A vérifie pour tout* $(t, s) \in \mathbb{R}^2$*,* $A(t)A(s) = A(s)A(t)$*, la résolvante est donnée par :*

$$R(2\pi, t) = \exp\left(\int_t^{2\pi} A(s)\mathrm{d}s\right) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\cos(t) \\ 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice est nilpotente (d'ordre de nilpotence valant 2*), on peut calculer facilement son exponentielle, et pour tout réel* t*,*

$$R(2\pi, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\cos(t) \\ 0 & 1 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice gramienne est donnée par :

$$\mathfrak{G} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (1-\cos(t))^2 & -\sin(t)(1-\cos(t)) & 1-\cos(t) \\ -\sin(t)(1-\cos(t)) & \sin^2(t) & -\sin(t) \\ 1-\cos(t) & -\sin(t) & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 3\pi & 0 & 2\pi \\ 0 & \pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $2\pi^3$*, qui est donc inversible. Ceci montre la contrôlabilité du système*

Exemple 2.6. *On considère maintenant le système* $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= u \end{cases}$*. Ce système est-il contrôlable sur* $[0, T]$*, avec* $T > 0$ *? Il se met sous la forme* (2) *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Le système étant à coefficients constant, la résolvante est donnée par une exponentielle matricielle. On remarque facilement que pour tout réel* t*,*

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la gramienne du système est donnée par :

$$\mathfrak{G} = \int_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est non inversible, ce qui prouve que le système est non contrôlable. Ce calcul est fidèle à l'intuition. En effet, le contrôle n'affecte que la dynamique en y*, la coordonnée en* x *agit selon une dynamique indépendante de* u*, et ne peut donc pas être contrôlé.*

Ces exemples permettent de constater que ce critère est parfois compliqué à mettre en œuvre en pratique ; il faut pouvoir calculer la résolvante du système, puis l'intégrale, déterminer si la matrice est inversible, etc. On cherche donc à déterminer un critère plus simple à vérifier en pratique.

2.3 Théorème de Kalman

Dans toute cette section, on suppose que A et B sont des matrices à coefficients constants.

Définition 2.7 (Ending map)**.** *On définit l'opérateur :*

$$\mathcal{F}_{T_1} : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty) & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)u(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}$$

Remarque 2.8. *Au vu de cette définition, le système* (2) *est contrôlable sur l'intervalle* $[T_0, T_1]$ *ssi l'application* $\mathcal{F}_{T_1}$ *est surjective*

Définition 2.9 (Matrice de Kalman)**.** *On introduit la matrice de Kalman du système* (2),

$$K = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n,n\times m}(\mathbb{R}),$$

matrice dont les m *premières colonnes sont celles de* B*, les* m *suivantes celles de* AB *etc.*

Les deux propositions suivantes motivent l'introduction de la matrice de Kalman :

Proposition 2.10 (Lien avec l'ending map)**.**

$$Im(K) = Im(\mathcal{F}_{T_1})$$

Démonstration. On remarque que $\mathrm{Im}(K) = \mathrm{Vect}(A^iBu, u \in \mathbb{R}^m,\ i \in [\![0, n-1]\!])$.

Pour le sens direct, on considère $y \in \mathrm{Im}(K)^\perp$. Alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, ${}^tyA^iB = 0$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on peut écrire A^n comme combinaison linéaire des $(A^i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$. Alors, par récurrence, on montre que $\forall i \in \mathbb{N}$, ${}^tyA^iB = 0$. Par suite, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout réel t,

$${}^ty\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}B = 0.$$

En passant à la limite, on obtient ${}^tye^{At}B = 0$, pour tout réel t. Ainsi, pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$,

$$(y, \mathcal{F}_{T_1}(u))_{2,\mathbb{R}^n} = {}^ty\int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1-s)A}Bu(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Par suite, $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})^\perp$.

Réciproquement, on considère $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})^\perp$, alors, pour tout $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$, on a :

$$(y, \mathcal{F}_{T_1}(u))_{2,\mathbb{R}^n} = {}^ty\mathcal{F}_{T_1}(u) = \int_{T_0}^{T_1} {}^tye^{(T_1-s)A}Bu(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi, on obtient avec le contrôle particulier $u : t \in [T_0, T_1] \mapsto {}^tBe^{(T-t)^tA}y \in \mathbb{R}^m$:

$$\int_{T_0}^{T_1} \left\|{}^tye^{(T_1-s)A}B\right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi,

$$g : t \in [T_0, T_1] \mapsto {}^tye^{(T_1-t)A}B \in \mathbb{R}^m$$

est nulle. Ainsi, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $g^{(i)}(T_1) = (-1)^{it}yA^iB = 0$. Par suite,

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall u \in \mathbb{R}^m, \qquad {}^tyA^iBu = 0;$$

Donc, $y \in \mathrm{Im}(K)^\perp$. □

Proposition 2.11 (Lien avec la matrice gramienne)**.**

$$Im(K)^\perp = \ker(\mathfrak{S}).$$

Démonstration. En introduisant $g : t \in [T_0, T_1] \mapsto {}^tye^{(T_1-t)A}B$, on a :

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Im}(K)^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall u \in \mathbb{R}^m,\ (y, A^iBu)_{2,\mathbb{R}^n} = {}^tyA^iBu = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ {}^tyA^iB = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N},\ {}^tyA^iB = 0 \text{ (par Cayley-Hamilton)}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N},\ g^{(i)}(T_1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad g \equiv 0 \text{ (car } g \text{ est analytique)}\\
&\Leftrightarrow \quad \int_{T_0}^{T_1} \|g(t)\|_{2,\mathbb{R}^m}^2 \mathrm{d}t = 0 \text{ (par continuité)}\\
&\Leftrightarrow \quad {}^ty\mathfrak{S}y = 0\\
&\Leftrightarrow \quad y \in \ker(\mathfrak{S}).
\end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, le sens réciproque est clair. Pour le sens direct, si ${}^t y\mathfrak{G}y = 0$, alors, comme $\mathfrak{G}$ est symétrique positive, elle admet une racine carré, *i.e.* il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = \mathfrak{G}$. Ainsi,

$$0 = {}^t y\mathfrak{G}y = {}^t yS^2y = \|Sy\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 .$$

Donc, $y \in \ker(S) = \ker(S^2) = \ker(\mathfrak{G})$. □

Théorème 2.12 (Kalman)**.** *Le système* (2) *est contrôlable ssi* $rg(K) = n$.

Démonstration.

Le système est contrôlable ssi $\mathfrak{G} \in GL_n(\mathbb{R})$ ssi $\ker(\mathfrak{G}) = 0$ ssi $\mathrm{Im}(K) = \mathbb{R}^n$ ssi $\mathrm{rg}(K) = n$.

□

Remarques 2.13.

1. *Dans cette condition, les variables T_0 et T_1 n'apparaissent pas. Ainsi, dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, entre contrôlable sur $[T_0, T_1]$ est équivalent à être contrôlable sur $[T_0', T_1']$. Cela ne dépend pas de l'intervalle de temps sur lequel on se place.*
2. *On obtient même de la smooth-STLC. Plus précisement, on peut utiliser la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour montrer qu'il est possible d'obtenir de la contrôlabilité avec des contrôles $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.*
3. *Cadre : contrôle scalaire ($m = 1$) et $A \sim diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, diagonalisable. La formule de Duhamel fournit :*

$$\forall t,\ x(t) = e^{A(t-T_0)}x_0 + \int_{T_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi, $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\forall T_0 < T_1$, on a :

$$x(T_1) = x_1 \Leftrightarrow \int_{T_0}^{T_1} e^{A(T_1-s)}Bu(s)\mathrm{d}s = x_1 - e^{A(T_1-T_0)}x_0.$$

On introduit une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation de A et, en écrivant $B = (b_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, $x_{0/1} = \left(x_{0,i/1,i}\right)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ les coordonnées associées dans cette base.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad b_i \int_{T_0}^{T_1} u(s)e^{\lambda_i(T_1-s)}\mathrm{d}s = x_{1,i} - e^{\lambda_i(T_1-T_0)}x_{0,i}.$$

Ce système admet une unique solution quelque soit x_0, x_1 ssi les $(\lambda_i)_i$ sont deux à deux distincts, et les b_i sont non nuls (on construit alors une famille biorthogonale à $(t \mapsto e^{-\lambda_j t})_j$). De plus,

$$\det(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}b_n \end{vmatrix} = b_1 \dots b_n \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

4. *Recasage :* $148 - 220 - 221$.
5. *Référence : Control and Nonlinearity, J.-M. Coron.*

Exemple 2.14. *On reprend l'exemple* 2 *traité dans la partie précédente. On a* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi,*

$$rg(B, AB) = rg\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

Le système est donc contrôlable sur $[T_0, T_1]$, quelque soit $(T_0, T_1) \in \mathbb{R}^2$.

3 Vers les distributions

Proposition 3.1 (Dérivation constante sur $\mathbb{R}$)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \underset{\mathcal{D}'(I)}{=} 0$. Alors, il existe $C > 0$ tel que :*

$$T \underset{\mathcal{D}'(I)}{=} C.$$

Remarque 3.2. *Il s'agit ici d'un abus de notation. Dans l'égalité précédente, la constante présente dans le second membre désigne la distribution associée à la fonction constante C, qui est $L^1_{loc}(I)$.*

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(I)$ vérifiant $\int_I \chi(t)\mathrm{d}t = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors, $\psi := \varphi - \chi \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(I)$ est d'intégrale nulle. Ainsi, il existe $\xi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\xi' = \psi$. On a alors :

$$(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = \left(T, \xi' + \chi \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t\right)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = \underbrace{-(T',\psi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}}_{=0} + (T,\chi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} \cdot \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

On obtient donc : $(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = (C,\varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}$, avec $C = (T,\chi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}$. □

Exemple 3.3. *Résolvons dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT' + T = 0$. On a :*

$$\begin{aligned} xT' + T \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 &\Leftrightarrow (xT)' \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0,\ xT \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} C \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0,\ x\left(T - C vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0, K > 0,\ T \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} C vp\left(\frac{1}{x}\right) + K\delta_0. \end{aligned}$$

4 Autres suggestions

1. Cauchy-Lispchitz global. Recasage : 205 – 220 – (220 – 221).
2. Nombre de zéros d'une EDO. Recasage : 220 – 221 – 224.
   Référence : Quéffelec-Zuily, *Analyse pour l'agrégation* (p 404).
   Théorème 4.1 (Nombre de zéros d'une EDO)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $q'(x) = o_{+\infty}(q^{\frac{3}{2}}(x))$ et $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(x)}\mathrm{d}x = +\infty$. Soit y une solution non nulle de l'EDO $y'' + qy = 0$. On définit alors, pour $x \geqslant a$, $N(x) = \#\left\{u \in [a,x],\ y(u) = 0\right\}$. Alors,*
   $$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\mathrm{d}u.$$
3. Étude des équations de Hill Mathieu. Recasage : 220 – 221.
4. EDP de transport linéaire. Recasage : 220 – 221.
5. Problème aux limites (espace de Sobolev et Lax Milgram). Recasage : 205 – 208 – 213.
6. Partie d'un développement : transformée de Fourier de la Gaussienne.