Distributions :

Voici les notes que j'ai réalisées lors de mon année de préparation à l'agrégation sur les distributions.

Table des matières

Dans tout ce document, d désigne un entier naturel non nul et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

0 Notations

Introduisons quelques notations qui nous seront utiles pour tout ce document.

Définition 1 (*Multi-indice, longueur, dérivée*)

On appelle multi-indice, la donnée d'un d-uplet d'entiers naturels, $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On appelle longueur de α la donnée : $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Définition 2 (*Dérivation*)

On considère $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega, \mathbb{R})$, on note :

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}.$$

Définition 3 (*Notations*)

Si on considère $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, et $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice, on note

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}.$$

De la même façon on note :

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!.$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ deux multi-indices, on note $\beta \leqslant \alpha$ si pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\beta_i \leqslant \alpha_i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ deux multi-indices vérifiant $\beta \leqslant \alpha$. On définit le coefficient binomial comme suit :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Avec toutes ces définitions, la formule de Leibnitz reste valable. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Theorème 1 (*Formule de Leibnitz généralisée*)

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, un multi-indice. On considère $f, g \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, on a :

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leqslant |\alpha|}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta} g.$$

Cette formule est dite de Leibnitz.

Démonstration : On démontre ce théorème par récurrence sur $|\alpha|$. ■

1 Fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

1.1 Existence

Définition 4 (*Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact*)

On note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur l'ouvert Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il n'est pas clair que cet ensemble est non vide. Nous allons le vérifier :

Lemme 1 (*Existence de fonctions de $\mathcal{D}$*)

Soient $a_1, \cdots a_d, b_1, \cdots, b_d \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$. Alors, il existe $\rho_{(a_i),(b_i)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\mathit{Supp}(\rho_{(a_i),(b_i)}) = \prod_{i=1}^d [a_i; b_i].$$

Démonstration : Soit $\varphi : \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$. On peut facilement vérifier par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x > 0,\ \varphi^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

On déduit de cette expression que φ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, il est clair que $\mathrm{Supp}(\varphi) = [0, +\infty[$. Il est maintenant facile de répondre à la problématique, il suffit de considérer :

$$\rho_{(a_i),(b_i)} : (x) = \prod_{i=1}^d \varphi(x_i - a_i)\varphi(b_i - x_i).$$

■

Lemme 2 (*Existence de fonctions de $\mathcal{D}$ bis*)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Alors, il existe $\rho_{x_0,r} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\mathit{Supp}(\rho_{x_0,r}) = \overline{B(x_0, r)}.$$

Démonstration : Il suffit de considérer : $\rho_{x_0,r} = \varphi\left(1 - \frac{\|x_0 - \cdot\|^2}{r^2}\right)$, où φ est l'application définie dans la démonstration du lemme précédent. ■

Lemme 3 (*Existence de fonctions en escalier*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors, il existe $I_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

1. $0 \leqslant I_{a,b} \leqslant 1$.
2. $I_{a,b}|_{]-\infty,a]} \equiv 0$.
3. $I_{a,b}|_{[b,+\infty[} \equiv 1$.

Démonstration : On considère $I_{a,b} : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\int_{-\infty}^{x} \rho_{a,b}(y)\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} \rho_{a,b}(y)\mathrm{d}y}$. Il est clair que cette fonction est bien définie (les intégrales convergent, car la fonction est à support compact). De plus, elle est évidemment $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La positivité de l'intégrande permet de montrer directement le point 1. Enfin, il suffit d'utiliser la définition de $\rho_{a,b}$ afin de montrer que les points 2 et 3 sont vérifiés. ■

1.2 Vers les fonctions plateaux

Afin de démontrer l'existence de fonctions plateaux, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et $r > 0$. Alors, il existe une fonction $\chi_{x_0,r} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_{x_0,r}(x_0) = 2$, Supp$(\chi_{x_0,r}) = \overline{B(x_0, r)}$ et $\chi_{x_0,r} > 0$ sur $B(x_0, r)$.

Démonstration : Il suffit de considérer la fonction définie dans le lemme 2, et de la multiplier par $2e^{-1}$ afin de prescrire la valeur en x_0 de la fonction. Ainsi, $\chi_{x_0,r} = 2e^{-1}\rho_{x_0,r}$ convient. ■

Theorème 2 (*Existence de fonction plateaux*)

On considère $K \subset \Omega$ un compact. Alors, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage ouvert de K, Supp$(\varphi) \subseteq \Omega$, et $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Démonstration : Soit $x \in \Omega$. Par définition, il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}(x, r_x)} \subset \Omega$. De plus, en adoptant les notations du lemme précédent, on a : $\chi_{x,r_x}(x) = 2$. Par continuité, il existe $\rho_x > 0$, tel que $\chi_{x,r_x} \geqslant 1$ sur $B(x, \rho_x)$. Remarquons que $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \rho_x)$. Ainsi, la propriété de Borel-Lebesgue assure que nous pouvons extraire de ce recouvrement du compact K par des ouverts un sous-recouvrement fini ; il existe $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_N \in K$ tel que :

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \rho_i) := V,$$

où l'on a noté $\rho_i = \rho_{x_i}$. De plus, V est un voisinage ouvert de K. On pose

$$\varphi = I_{0,1}\left(\sum_{i=1}^{N} \chi_{x_i, r_{x_i}}\right).$$

Montrons que φ convient (on rappelle que la fonction $I_{0,1}$ est la fonction en escalier définie dans le lemme 3). Il est clair que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ comme composée de telles fonctions, et que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. De plus, pour tout $x \in V$, il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $x \in B(x_i, \rho_i)$. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_{x_j, r_{x_j}}(x) = \underbrace{\chi_{x_i, r_{x_i}}(x)}_{\geqslant 1} + \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^{N} \chi_{x_j, r_{x_j}}(x)}_{\geqslant 0} \geqslant 1.$$

Ainsi, $\varphi \equiv 1$ sur V. Il faut enfin vérifier que la condition de support est bien respectée. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{N} B(x, r_{x_i})^c$, alors, $\sum_{i=1}^{N} \chi_{x_i, r_{x_i}}(x) = 0$. Ainsi, $\varphi(x) = 0$. Alors,

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i})} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B(x_i, r_{x_i})} \subseteq \Omega.$$

Ceci conclut la preuve. ■

1.3 Topologie

On définit une notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$, comme suit :

Définition 5 (*Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$*)

Étant donnés $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on dit $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

1. *Il existe K compact, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Supp$(\varphi_n) \subseteq K$.*
2. *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

On appelle distribution, toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour cette notion de convergence. La topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est très compliquée à étudier. Heureusement, nous possédons une caractérisation facile à étudier en pratique. Nous détaillerons cela dans la partie suivante, liée aux distributions (notamment le théorème 3).

1.4 Un lemme utile

Lemme 5 (*Développement de Taylor avec estimations*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, il existe $r_n[\varphi] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, telle que :

1. *$\forall x \in \mathbb{R}$,*
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} r_n[\varphi](x). \tag{1}$$
2. *$\forall j \in \mathbb{N}$,*
$$\left\| r_n[\varphi]^{(j)} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{j!}{(n+j+1)!} \left\| \varphi^{(n+j+1)} \right\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Démonstration : On applique un développement de Taylor de la fonction φ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(tx) \mathrm{d}t.$$

On définit donc $r_n[\varphi] : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(tx) \mathrm{d}t$. Montrons que cette fonction convient. En effet, on a : $\forall t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(tx) \right) \right| = \left| \frac{(1-t)^n t^j}{n!} \varphi^{(n+j+1)}(tx) \right| \leqslant \frac{1}{n!} (1-t)^n t^j \left\| \varphi^{(n+j+1)} \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \in L^1(0,1).$$

Ainsi, le théorème de dérivation sous le signe intégral affirme que $r_n[\varphi] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$r_n[\varphi]^{(j)}(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n t^j}{n!} \varphi^{(n+j+1)}(tx) \mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\left|r_n[\varphi]^{(j)}(x)\right| \leqslant \frac{\left\|\varphi^{(n+j+1)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n t^j \mathrm{d}t.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale ; on remarque que :

$$\int_0^1 (1-t)^n t^j \mathrm{d}t = \beta(j+1, n+1) = \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+n+2)} = \frac{j!n!}{(j+n+1)!}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$\left\|r_n[\varphi]^{(j)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\left\|\varphi^{(n+j+1)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} j!}{(j+n+1)!}.$$

■

Corollaire 1 (*CNS de prolongement*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, l'application $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^n}$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ssi pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi^{(k)}(0) = 0$.

Démonstration : Soit $g(x) := \dfrac{\varphi(x)}{x^n}$ un tel prolongement dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, la formule de Leibnitz donne, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n+j-k)!} g^{(j)}(x) x^{n+j-k}.$$

L'évaluation en 0 fournit le résultat. Réciproquement, on suppose que les premières dérivées sont nulles. Le lemme précédent donne : $\varphi(x) = x^n r_{n-1}[\varphi](x)$, où $r_{n-1}[\varphi] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus, cette égalité permet d'assurer que le support de $r_{n-1}[\varphi]$ est compact. ■

2 Distributions

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 6 (*Distribution*)

On appelle distribution, toute forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant : pour tout $K \subseteq \Omega$, compact, il existe $c_K > 0$, $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec Supp$(\varphi) \subseteq K$,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leqslant \rho_k}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}.$$

On note $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 1 (Masse de Dirac)**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On considère $\delta_{x_0} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \varphi(x_0) \in \mathbb{R}$. Montrons que c'est une distribution : c'est clairement une forme linéaire. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que Supp$(\varphi) \subseteq K$. Alors*

$$\left|(\delta_{x_0}, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}\right| = |\varphi(x_0)| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

Exemple 2 (Peigne de Dirac)**.** *On considère $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$. Montrons que c'est une distribution. On commence par vérifier que la série est bien convergente : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que Supp$(\varphi) \subseteq [-N, N]$. Alors,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(k)| = \sum_{k=-N}^{N} |\varphi(k)|.$$

La série est convergente car la somme est finie. De plus, c'est bien une distribution : c'est clairement une forme linéaire. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq [-N, N]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $Supp(\varphi) \subseteq K$, on a :

$$\left|(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}\right| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \varphi(k)\right| \leqslant (2N+1)\left\|\varphi\right\|_{L^\infty(K)}.$$

Theorème 3 (*Caractérisation séquentielle*)

Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors, T est une distribution si et seulement si T est continue séquentiellement.

Démonstration : On suppose que T est une distribution. On considère $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Le but est de montrer que $(T,\varphi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$ dans $\mathbb{C}$. On sait qu'il existe un compact K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subseteq K$. La convergence étant uniforme, il en est de même pour φ. La définition d'une distribution assure que : il existe $c_K > 0$, $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$\left|(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d,\\ |\alpha|\leqslant\rho_k}} \left\|\partial^\alpha\varphi\right\|_{\infty,K}.$$

Alors, par linéarité,

$$\left|(T,\varphi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} - (T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left|(T,\varphi_n-\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d,\\ |\alpha|\leqslant\rho_k}} \left\|\partial^\alpha\varphi_n - \partial^\alpha\varphi\right\|_{\infty,K}.$$

Par définition de la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$, cette quantité tend vers 0.

Réciproquement, on suppose que T vérifie la propriété de continuité séquentielle mais qu'elle n'est pas une distribution. Alors, il existe un compact K, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_{n,k} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi_{n,k}) \subseteq K$ et

$$\left|(T,\varphi_{n,k})_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| > n \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d,\\ |\alpha|\leqslant k}} \left\|\partial^\alpha\varphi_{n,k}\right\|_{\infty,K}.$$

On pose enfin $\psi_n := \dfrac{1}{(T,\varphi_{n,n})_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}}\varphi_{n,n} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par linéarité de T, on a $(T,\psi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 1$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, multi-indice,

$$\left\|\partial^\alpha\psi_n\right\|_{\infty,K} \leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d,\\ |\alpha|\leqslant n}} \left\|\partial^\alpha\psi_n\right\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, $(\psi_n)_n$ étant à valeurs dans un compact fixe, cette suite converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers 0. Alors, par continuité séquentielle de T, $1 = (T,\psi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est impossible. ■

Il existe une grande classe de distributions, donnée par les fonctions localement intégrables. Plus précisément, on a :

Theorème 4 (*Fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$*)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On lui associe : $T_f : \begin{bmatrix} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix}$. Alors, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De plus, l'application :

$$T : \begin{bmatrix} L^1_{loc}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f \end{bmatrix}$$

est injective. L'ensemble $L^1_{loc}(\Omega)$ s'injecte dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration : On considère $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On sait que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{\infty,K} \int_{\mathrm{Supp}(\varphi)} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

Ceci montre que les quantités sont bien définies. L'application T_f est clairement linéaire. Montrons que c'est une distribution : soit K un compact, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$, alors

$$\left|(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant \left(\int_K |f(x)|\mathrm{d}x\right) \|\varphi\|_{\infty,K}.$$

Ceci conclut. Montrons que l'application T est injective. Il suffit de démontrer le lemme suivant. ■

Lemme 6 (*Injectivité de $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$*)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Alors, $f \equiv 0$.

Démonstration : Soit $x \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. On considère $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau, valant 1 sur un voisinage ouvert de $\overline{B(x,r)}$. Alors, $g := f\theta \in L^1(\Omega)$. Si on considère une suite régularisante $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, alors,

$$\forall z \in \Omega,\ \rho_\varepsilon * g(z) = \int_\Omega f(y)\theta(y)\rho_\varepsilon(z-y)\mathrm{d}y = 0.$$

Puisque $\|\rho_\varepsilon * g - g\|_{L^1(\Omega)} \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} 0$, on a donc $g \equiv 0$ pp sur Ω, donc $f \equiv 0$ pp sur $B(x,r)$. On conclut en remarquant que l'on peut écrire Ω comme une union dénombrable de boules. ■

Exemple 3. *L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Néanmoins, on souhaiterait lui associer une distribution. On va jouer sur l'imparité de la fonction afin de faire disparaître la singularité en* 0. *On définit alors une distribution, dite valeur principale de $\frac{1}{x}$. Plus précisément, on définit*

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Montrons premièrement que cette quantité est bien définie : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on considère $R > 0$ tel que Supp$(\varphi) \subseteq [-R;R]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Par le lemme 5, *on obtient directement :*

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \left(r_0[\varphi](x) + r_0[\varphi](-x)\right)\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^R \left(r_0[\varphi](x) + r_0[\varphi](-x)\right)\mathrm{d}x,$$

par convergence dominée. Ceci montre que la limite existe. Montrons que l'application ainsi définie est une distribution. Elle est clairement linéaire. Soit K un compact. Alors, il existe $R > 0$ tel que $K \subseteq [-R;R]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que Supp$(\varphi) \subseteq K$,

$$\left|\left(vp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}\right| = \left|\int_0^R \left(r_0[\varphi](x) + r_0[\varphi](-x)\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2R\,\|\varphi'\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Ceci montre le résultat.

Remarque 1. *Néanmoins, $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$. Montrons que $vp(\frac{1}{x})|_{\mathbb{R}^*} = T_f$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors, $d(Supp(\varphi), 0) > 0$, donc il existe $\tau > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\tau, \tau]$, $\varphi(x) = 0$. Ainsi, pour tout $0 < \varepsilon < \tau$,*

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{|x|\geqslant\tau} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\left(vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{|x|\geqslant\tau} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{\varphi(x)}{x} = (f, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*),\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)}.$$

Exemple 4. *On peut répéter la manipulation, et on définit de cette manière la partie finie de $\frac{1}{x^2}$. Pour cela, on considère $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on fixe $R > 0$ tel que $Supp(\varphi) \subseteq [-R; R]$, et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x^2}\mathrm{d}x = 2\varphi(0)\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{\varepsilon}^{R} (r_1[\varphi](x) + r_1[\varphi](-x))\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{R} + \int_{\varepsilon}^{R} (r_1[\varphi](x) + r_1[\varphi](-x))\,\mathrm{d}x.$$

On extrait la partie divergente, et on définit : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left(pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

Le calcul précédent montre que la limite existe. On montre que c'est une distribution de la même façon que l'exemple précédent.

Remarque 2. *On peut définir pour $k \geqslant 2$ la partie finie de $\frac{1}{x^k}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $Supp(\varphi) \subseteq [-R; R]$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^k}\mathrm{d}x = 2\sum_{\substack{j=0,\\ j+k \text{ pair}}}^{k-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!(j-k+1)}\left(\frac{1}{R^{k-j-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{k-j-1}}\right) + \int_{\varepsilon}^{R} (r_{k-1}[\varphi](x) + r_{k-1}[\varphi](-x))\,\mathrm{d}x$$

Alors, pour tout $k \geq 2$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left(pf\left(\frac{1}{x^k}\right), \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^k}\mathrm{d}x - 2\sum_{\substack{j=0,\\ j+k \text{ pair}}}^{k-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!(k-j-1)\varepsilon^{k-j-1}}\right).$$

Exemple 5. *La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est $L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$ mais elle n'est pas $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas lui associer directement une distribution. Montrons qu'il n'existe pas de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T|_{\mathbb{R}^*} = e^{\frac{1}{x}}$. On suppose que c'est le cas, et on considère $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $(2, 3)$, $Supp(\chi) \subset (1, 4)$, et $0 \leqslant \chi \leqslant 1$. On définit alors, pour $n \geqslant 1$, $\chi_n = \chi(n\cdot)$. Par définition, $Supp(\chi_n) \subseteq (\frac{1}{n}, \frac{4}{n})$. On considère le compact $K = [0, 4]$, par définition, il existe $c_K > 0$ et $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $Supp(\varphi) \subseteq K$,*

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}\right| \leqslant c_K \sum_{j=0}^{\rho_K} \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{\infty,K}.$$

Il vient donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n}e^{\frac{n}{3}} \leqslant \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{4}{n}} e^{\frac{1}{x}}\chi_n(x)\mathrm{d}x = (T, \chi_n)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \leqslant c_K \sum_{j=0}^{\rho_k} n^j \left\|\chi\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant Cn^{\rho_K}.$$

C'est impossible.

Exemple 6. *Il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $T_f = \delta_0$. En effet, supposons que c'est le cas : considérons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$, et $Supp(\chi) \subseteq (-1, 1)$. On pose enfin $\chi_n = \chi(n\cdot)$. Alors,*

$$1 = \chi_n(0) = (\delta_0, \chi_n)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = (f, \chi_n)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \chi_n(x)f(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.2 Ordre d'une distribution

Définition 7 (*Ordre d'une distribution*)

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre au plus $p \in \mathbb{N}$ si pour tout K compact, on a $\rho_K \leqslant p$. On dit de plus qu'elle est d'ordre p exactement s'il existe un compact tel que $\rho_K = p$.

Exemple 7. *Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre* 0.

Exemple 8. *La masse de Dirac est une distribution d'ordre* 0.

Exemple 9. *Le peigne de Dirac est une distribution d'ordre* 0.

Exemple 10. *La distribution $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre* 1. *En effet, on a montré qu'elle est d'ordre au plus* 1. *Montrons qu'elle n'est pas d'ordre* 0. *On suppose que c'est le cas, alors : on considère $n \geqslant 1$, et $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $Supp(\varphi_n) \subseteq (\frac{1}{2n}, 2)$, $\varphi_n \equiv 1$ sur $(\frac{1}{n}, 1)$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Pour le compact $K = [0, 2]$, on a : il existe $c_K > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $Supp(\varphi) \subset K$,*

$$\left| \left(vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \right| \leqslant c_K \left\| \varphi \right\|_{\infty, \mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\ln(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x} \mathrm{d}x = \left(vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n \right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \leqslant c_K.$$

C'est impossible.

Définition 8 (*Distribution positive*)

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive, si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $\varphi \geqslant 0$, $(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \geqslant 0$.

Exemple 11. *La masse de Dirac est une distribution positive*

Exemple 12. *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est positive pp, alors, T_f est une distribution positive*

Proposition 1 (*Ordre d'une distribution positive*)

Toute distribution positive est d'ordre 0.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, positive. On considère $K \subset \Omega$, un compact, et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, et $\chi \equiv 1$ sur K. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$, on pose $\tilde{\varphi} := \chi \left\| \varphi \right\|_{\infty, K} - \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, $\tilde{\varphi} \geqslant 0$. Ainsi, par définition,

$$\left\| \varphi \right\|_{\infty, K} (T, \chi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} - (T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = (T, \tilde{\varphi})_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \leqslant c_k \left\| \varphi \right\|_{\infty, K}.$$

En appliquant l'inégalité à $-\varphi$, on obtient le résultat. ■

2.3 Convergence de distribution

Définition 9 (*Convergence*)

Soient $(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Exemple 13. *Soient* $(f_n) \in L^1_{loc}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, *et* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *telle que* $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *dans* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Alors,* $T_{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *En effet, soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *alors*

$$\left|(T_{f_n}, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} - (T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left|\int_{Supp(\varphi)} (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\varphi\|_{\infty,\Omega} \int_{Supp(\varphi)} |f_n - f|.$$

Ceci conclut.

Exemple 14. *Soient* $(a_n) \in {\mathbb{R}^d}^{\mathbb{N}}$, *et* $a \in \mathbb{R}^d$, *telle que* $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ *Alors,* $\delta_{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta_a$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *En effet, soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, *alors*

$$\left|(\delta_{a_n}, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - (\delta_a, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}\right| = |\varphi(a_n) - \varphi(a)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par continuité de φ. *Ceci conclut.*

Exemple 15. *Soient* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite régularisante. Alors,* $\rho_\varepsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta_0$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *En effet, soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, *alors*

$$\left|(\rho_\varepsilon, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - (\delta_0, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, il est clair que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \rho_\varepsilon * \varphi(-\cdot)(0)$. *Puisque la fonction* $\varphi(-\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, *on a la convergence uniforme (donc simple) de* $\rho_\varepsilon * \varphi$ *vers* φ.

Exemple 16. *On a la convergence :* $(\sin(n\cdot))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$ *en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue.*

Exemple 17. *On a* $\left(\frac{\sin(n\cdot)}{\cdot}\right)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} \pi\delta_0$. *On considère* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) r_0[\varphi](x)\mathrm{d}x.$$

La première intégrale est indépendante de n, *à l'aide d'un changement de variables. Il est connu qu'elle vaut* π, *c'est l'intégrale de Dirichlet. La deuxième tend vers* 0 *en vertu du lemme de Riemann Lebesgue. Ceci donne le résultat*

Exemple 18. *On a* $\left(n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto 2\varphi'(0))$. *On considère* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors :*

$$n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{2n^2}r_1[\varphi]\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\varphi'(0) - \frac{1}{2n^2}r_1[\varphi]\left(-\frac{1}{n}\right)\right).$$

$$n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = 2\varphi'(0) + \frac{1}{2n}\left(r_1[\varphi]\left(\frac{1}{n}\right) - r_1[\varphi]\left(-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Enfin, puisque

$$\left|\frac{1}{2n}\left(r_1[\varphi]\left(\frac{1}{n}\right) - r_1[\varphi]\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{\|\varphi''\|_{\infty,\mathbb{R}}}{2n},$$

on en déduit le résultat. On verra que l'on peut interpréter la distribution limite comme la dérivée de δ_0 *(au signe près).*

Proposition 2 (*Principe de la borne uniforme*)

Soit $(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$, et K un compact de Ω, tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec Supp$(\varphi) \subseteq K$, la suite $((T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)})_n$ converge. Alors, il existe $c_K > 0$, et $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \text{avec Supp}(\varphi) \subseteq K,\ \left|(T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

Ce théorème est issu d'une version généralisée du théorème Banach-Steinhaus, mais dans les espaces de Fréchet. Voici deux conséquences de ce théorème :

Proposition 3

Soit $(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{\longrightarrow}} T$, et $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow}} \varphi$. Alors,

$$(T_n, \varphi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Démonstration : On sait qu'il existe K, un compact de Ω tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Supp$(\varphi_n) \subseteq K$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ supporté dans K, la suite $((T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)})_n$ converge. Ainsi, le principe de la formule uniforme assure qu'il existe $c_K > 0$, et $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \text{avec Supp}(\varphi) \subseteq K,\ \left|(T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

Alors,

$$\left|(T_n, \varphi_n)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} - (T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant \left|(T_n, \varphi_n - \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| + \left|(T_n - T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right|.$$

Le premier terme tend vers 0 car :

$$\left|(T_n, \varphi_n - \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K},$$

puisque la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ implique la convergence uniforme de toutes les dérivées. De plus, le second membre tend vers 0 par définition de la convergence d'une distribution. ∎

Proposition 4

Soit $(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $((T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{\longrightarrow}} T$.

Démonstration : On définit $T : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \lim_{n\to+\infty} (T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$. Elle est clairement linéaire. Montrons que c'est une distribution. On fixe K un compact. On utilise le principe de la borne uniforme : il existe $c_K > 0$, et $\rho_K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \text{avec Supp}(\varphi) \subseteq K,\ \left|(T_n, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

En prenant la limite quand $n \to +\infty$, on conclut ; $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ∎

2.4 Multiplication d'une distribution par une fonction

Définition 10 (*Multiplication d'une distribution*)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On définit aT par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ (aT, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = (T, a\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Alors, $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration : On considère K un compact. Alors, il existe $c_K > 0$, $\rho_K \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\mathrm{Supp}(\Omega) \subseteq K$,

$$\left|(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha|\leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$\left|(aT,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha|\leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha (a\varphi)\|_{\infty,K}.$$

On utilise la formule de Leibnitz : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $x \in \Omega$,

$$\partial^\alpha (a\varphi)(x) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi(x) \partial^{\alpha-\beta} a(x).$$

Ainsi,

$$\|\partial^\alpha (a\varphi)\|_{\infty,K} \leqslant \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\partial^\beta \varphi\right\|_{\infty,K} \left\|\partial^{\alpha-\beta} a\right\|_{\infty,K} \leqslant 2^{|\alpha|} \max_{|\alpha|\leqslant\rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \max_{|\alpha|\leqslant\rho_K} \|\partial^\alpha a\|_{\infty,K}.$$

Par suite,

$$\left|(aT,\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant C(c_K,a) \max_{|\alpha|\leqslant\rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \leqslant C(c_K,a) \sum_{|\alpha|\leqslant\rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

Ceci montre que $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Remarque 3. *De plus, on a montré que l'ordre de aT est inférieur ou égal à l'ordre de T.*

Exemple 19. *Montrons que :*

$$xpf\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} vp\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors,

$$\left(xpf\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{(x\varphi)(0)}{\varepsilon}\right) \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right).$$

Ceci conclut.

Exemple 20. *Montrons que :*

$$xvp\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 1.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left(xvp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Par théorème de convergence dominée,

$$\left(xvp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} 1\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x = (1,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Exemple 21. *Montrons que :*

$$x\delta_0 \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$(\delta_0,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = (\delta_0, x\mapsto x\varphi(x))_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = 0\cdot\varphi(0) = 0.$$

Exercice. *Montrer que, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,*

$$x^p\delta_0^{(q)} \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \begin{cases} (-1)^p \dfrac{q!}{(q-p)!}\delta_0^{(q-p)} & si\ q\geqslant p \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

2.5 Dérivée d'une distribution

Définition 11 (*Dérivée d'une distribution*)

Étant donnés $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $j \in [\![1, d]\!]$, on définit la dérivée de T par rapport à x_j, $\partial^j T$ par dualité de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ (\partial^j T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = -(T, \partial^j \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

De plus, $\partial^j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration : Vérifions que ceci définit bien une distribution. Soit K un compact, alors il existe $c_K > 0$ et $\rho_K \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$, on a :

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$\left|(\partial^j T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}\right| = \left|-(T, \partial^j \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}\right| \leqslant c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K} \left\|\partial^\alpha \partial^j \varphi\right\|_{\infty, K} = c_K \sum_{|\alpha| \leqslant \rho_K + 1} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}.$$

Ainsi, $\partial^j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Remarque 4. *De plus, on a montré que l'ordre de $\partial^j T$ est inférieur ou égal à l'ordre de $T + 1$.*

Exemple 22. *On considère $H := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la fonction de Heaviside. Calculons sa dérivée : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq [-R; R]$,*

$$(H', \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -(H, \varphi')_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -\int_0^R \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) - \varphi(R) = (\delta_0, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$H' \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \delta_0.$$

Exemple 23. *On considère $f(x) := \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculons sa dérivée : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq [-R; R]$,*

$$(f', \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -(\ln|x|, \varphi')_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi'(x) \mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$(f', \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -\int_0^R \ln(x)(\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^R \ln(x)(\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \mathrm{d}x \right).$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$(f', \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x \right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \right).$$

Donc,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemple 24. *Calculons la dérivée de $vp\left(\frac{1}{x}\right)$. On considère $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]$. Alors,*

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(vp\left(\frac{1}{x}\right) \right), \varphi \right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

On pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$I_\varepsilon := \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties,

$$I_\varepsilon := \left[\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\right]_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\left|\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right| = \varepsilon\,|r_1[\varphi](\varepsilon)+r_1[\varphi](-\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi''\|_{\infty,\mathbb{R}} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, on obtient le résultat :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} vp\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} -pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Remarque 5. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Alors, $\partial^j T_f = T_{\partial^j f}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il suffit d'effectuer une intégration par parties.*

Définition 12 (*Dérivée d'ordre supérieur*)

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, on définit $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ (\partial^\alpha T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|}(T, \partial^\alpha\varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Exemple 25. *On a :*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|x| \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} -pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exemple 26 (Équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $x^n T \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une telle distribution. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On considère $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ et $\chi \equiv 1$ sur Supp(φ). Alors, par définition :*

$$\psi = \varphi - \chi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

vérifie, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\psi^{(k)}(0) = 0$. Ainsi, le corollaire 1 assure l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^n g(x)$. Ainsi,

$$(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(T, x\mapsto x^k\chi(x))_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} + (T, x\mapsto x^n g(x))_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Alors, le deuxième terme étant nul, on obtient, en notant $a_k := (T, x\mapsto x^k\chi(x))_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$,

$$(T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta_0^{(k)},\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}}{k!}(-1)^k a_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k a_k}{k!}\delta_0^{(k)}, \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$T \in \mathit{Vect}\left(\delta_0^{(k)},\ 0\leqslant k\leqslant n-1\right).$$

Réciproquement, soient $(a_0,\cdots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $T = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta_0^{(k)}$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$(x^n T,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{n!}{(n-j)!}0^{n-j}\varphi^{(k-j)}(0)\right) = 0.$$

Ceci conclut.

Proposition 5 (***Lemme de Schwartz***)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $i, j \in [\![1, d]\!]$, alors

$$\partial^i \partial^j T \underset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \partial^j \partial^i T.$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(\partial^i \partial^j T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -(\partial^j T, \partial^i \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = +(T, \partial^j \partial^i \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

On peut appliquer le lemme de Schwartz sur les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui sont régulières, et il vient :

$$(\partial^i \partial^j T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = +(T, \partial^i \partial^j \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -(\partial^i T, \partial^j \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = (\partial^j \partial^i T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$ ∎

Proposition 6 (***Dérivation et convergence***)

Soit $(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, telle que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(\partial^\alpha T_n, \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|}(T_n, \partial^\alpha \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|}(T, \partial^\alpha \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (\partial^\alpha T, \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$ ∎

Proposition 7 (***Dérivation constante sur*** $\mathbb{R}$)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' \underset{\mathcal{D}'(I)}{=} 0$. Alors, il existe $C > 0$ tel que :

$$T \underset{\mathcal{D}'(I)}{=} C.$$

Remarque 6. *Il s'agit ici d'un abus de notation. Dans l'égalité précédente, la constante présente dans le second membre désigne la distribution associée à la fonction constante C, qui est $L^1_{loc}(I)$.*

Démonstration : Soit $\chi \in \mathcal{D}(I)$ vérifiant $\displaystyle\int_I \chi(t)\mathrm{d}t = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors, $\psi := \varphi - \chi \displaystyle\int_I \varphi(t)\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(I)$ est d'intégrale nulle. Ainsi, il existe $\xi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\xi' = \psi$. On a alors :

$$(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = \left(T, \xi' + \chi \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t\right)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = \underbrace{-(T', \psi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}}_{=0} + (T, \chi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} \cdot \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

On obtient donc : $(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)} = (C, \varphi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}$, avec $C = (T, \chi)_{\mathcal{D}'(I),\mathcal{D}(I)}$. ∎

Exemple 27. *Résolvons dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT' + T = 0$. On a :*

$$\begin{aligned} xT' + T \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 \Leftrightarrow (xT)' &\underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0,\ xT \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} C \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0,\ x\left(T - C\,vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0, K > 0,\ T \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} C\,vp\left(\frac{1}{x}\right) + K\delta_0, \end{aligned}$$

la première équivalence étant justifiée par définition, la deuxième par la proposition 7, la troisième par l'exemple 20 et la dernière par l'exemple 26.

2.6 Solution élémentaire d'EDP

Étant donné un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$, on appelle **solution élémentaire** de l'opérateur, toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie $P(D)E = \delta_0$. L'intérêt de cette notation réside dans le fait suivant : étant donné S, on souhaite résoudre l'équation d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $P(D)f = S$. Alors, la solution est donnée par :

$$f = E * S.$$

Ce théorème dépasse le cadre de ce polycopié (il faudrait supposé que S est à support compact, donc définir la notation de support d'une distribution, et celle de convolution de distributions). Voici néanmoins quelques exemples :

Proposition 8 (*Solution élémentaire de l'opérateur des ondes*)

Soit

$$E : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est solution élémentaire de l'opérateur différentiel des ondes $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Démonstration : L'opérateur E étant borné, il définit de fait une distribution. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$(\square E, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E(x,t) \square\varphi(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

$$(\square E, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x|}^{+\infty} \frac{1}{2} \partial_{tt}^2 \varphi(x,t) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{-t}^{t} \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

$$(\square E, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \partial_t \varphi(x,x) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \partial_t \varphi(-x,x) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \left(\partial_x \varphi(t,t) - \partial_x \varphi(-t,t) \right) \mathrm{d}t.$$

$$(\square E, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \left(\partial_t \varphi(s,s) + \partial_x \varphi(s,s) \right) \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \partial_x \left(\varphi(-s,s) - \partial_t \varphi(-s,s) \right) \mathrm{d}s.$$

$$(\square E, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varphi(s,s) \mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varphi(-s,s) \mathrm{d}s = \varphi(0,0) = (\delta_{0_{\mathbb{R}^2}}, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}.$$

Ceci montre le résultat. ∎

Proposition 9 (*Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur*)

On considère

$$E : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(t) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Alors $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est solution élémentaire de l'opérateur différentiel des ondes $P := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Démonstration : Remarquons que pour tout $M > 0$,

$$\int_{[-M,M]^2} |E(x,t)| \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^M \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{-M}^{M} e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{2M}{\sqrt{4\pi}} \int_0^M \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < \infty.$$

Ainsi, $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$(PE, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -(E, \partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi \right)(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

$$(PE, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t) \mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4\pi t}}.$$

On considère $\varepsilon > 0$, alors, une intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \mathrm{d}t = E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \partial_t E(x,t) \varphi(x,t) \mathrm{d}t.$$

De plus, deux intégrations par parties donnent :

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4\pi t}} = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\partial^2_{xx}E(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

On remarque rapidement que, pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^+_*\times\mathbb{R}$, $\partial_t E(x,t)-\partial^2_{xx}E(x,t)=0$. On obtient donc après calculs,

$$(PE,\varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x = \varphi(0,0),$$

puisqu'on a affaire à une approximation de l'unité. ■

Proposition 10 (*Solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann*)

On considère

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{\pi(x+iy)}.$$

Alors $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ *est solution élémentaire de l'opérateur différentiel de Cauchy-Riemann* $P := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$.

La preuve est laissée en exercice au lecteur.