14 Applications linéaires continues

Exercice 14.1

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes sur E ssi $I_d : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $I_d : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

Exercice 14.2

Déterminer si les applications linéaires $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ suivantes sont continues :

1. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ munie de $\|.\|_1$, où $T : f \in E \mapsto fg \in E$, où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$, muni de $\left\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$, et $T : P \in E \mapsto P' \in E$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni de $\left\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$, et $T : P \in E \mapsto P' \in E$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$, muni de $\left\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$, et $T : P \in E \mapsto P' \in E$.
5. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $N_1 = \|.\|_2$, $N_2 = \|.\|_1$, et $T : f \in E \mapsto fg$, où $g \in E$ est fixé.

Exercice 14.3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme continu de E.
2. Pour $n \geq 0$, on considère $f_n : x \in [0,1] \mapsto ne^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_1$.
3. Déterminer $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_c(E)}$.

Exercice 14.4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$.
1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto P(X+1) \in E$ est-elle continue ?
2. L'application $\psi : P \in E \mapsto PA \in E$, où $A \in E$ est fixé, est-elle continue ?

Exercice 14.5

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considère $D : \varphi \in E \mapsto \varphi' \in E$. Montrer que, quelque que soit la norme N sur E, D n'est jamais une application linéaire continue de E dans E.

Exercice 14.6

Soit $(E, \|.\|)$ un EVN et u un endomorphisme de E, vérifiant $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u^k$.
1. Simplifier $v_n \circ (u - I_d)$. Montrer que $\ker(u - I_d) \cap \mathrm{Im}(u - I_d) = \{0\}$.
3. On suppose désormais E de dimension finie. Démontrer que $E = \ker(u - I_d) \bigoplus \mathrm{Im}(u - I_d) = E$.
4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - I_d)$. Montrer que $\forall x \in E,\ v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p(x)$.

Exercice 14.7

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose $\|u\| = \sup\{\|u(x)\| \,;\, \|x\| \leq 1\}$. Montrer que c'est une norme sous-mulitplicative sur $\mathcal{L}_c(E)$.