9 Théorème de convergence dominée

Exercice 9.1

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue.
1. On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$$

2. On suppose désormais f bornée. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 9.2

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et bornée.
1. On pose $I_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x$. Déterminer $l := \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. On suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée, avec $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $I_n - l$.

Exercice 9.3 (Fonction Γ)

Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

En introduisant $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 9.4

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes vérifiant que $\displaystyle\sum_n a_n n!$ converge absolument. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

Exercice 9.5

Pour tout entier naturel n, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
1. Justifier l'existence de J_n.
2. Calculer $J_n - J_{n+1}$.
3. En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Exercice 9.6

Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Exercice 9.7

On introduit la constante d'Euler comme :
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = \lim_{n\to+\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n$, où J_n est une intégrale à préciser.
3. Montrer que $J_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, et conclure.

Exercice 9.8

Montrer la convergence la série de terme général :
$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9.9 (Calcul de l'intégrale de Gauss)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \max\left(\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n, 0\right).$$

Montrer à l'aide d'un théorème de convergence dominée que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 9.10

Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t. \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{d}x$$

Exercice 9.11

Démontrer l'identité suivante :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$