16 Ensembles dénombrables

Exercice 16.1 ($\mathbb{N}^2$ est dénombrable (1))

On considère $f : (p,q) \in \mathbb{N} \mapsto \dfrac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p \in \mathbb{N}$.

1. Injectivité : On définit : $N = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \dfrac{k(k+1)}{2} \leq f(p,q) < \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}$. Montrer que $N = p+q$. Conclure.
2. Surjectivité : soit $n \in \mathbb{N}$, et $N = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \dfrac{k(k+1)}{2} \leq n < \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}$ En choisissant $q = n - \dfrac{1}{2}N(N+1)$, conclure.
3. Exprimer f^{-1}.

Exercice 16.2 ($\mathbb{N}^2$ est dénombrable (2))

Démontrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable en utilisant l'application :

$$\varphi : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q+1) \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 16.3

Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. (On pourra raisonner par l'aburde et si $(f_n)_n$ est une suite d'applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, introduire $f : n \in \mathbb{N} \mapsto f_n(n)+1 \in \mathbb{N}$).

Exercice 16.4

1. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe x_n dans $[0,1] \backslash \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]$.
2. Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 16.5

Soit X un ensemble non vide. Démontrer que Xet $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents.

Exercice 16.6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.