8 Espaces Vectoriels Normés

Exercice 8.1

On définit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N(x,y) = \max(|x|, |x+y|).$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.
3. Montrer qu'elle est équivalente à la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.2

Soit E l'espace des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \text{ et }, N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes (on pourra considérer $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(\pi n x)$)
3. Montrer que $\forall f \in E,\ N_\infty(f) \leq N(f)$.

Exercice 8.3

Soit $n \geq 2$. Existe-il une norme N, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(AB) = N(A)N(B).$$

Exercice 8.4

On munit l'espace $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées de la norme infinie. On note $u = ((-1)^n)_n$.
1. Déterminer la distance $d(u,1)$ de la suite u à la suite constante égale à 1. Déterminer de même $d(u,-1)$ et $d(u,0)$.
2. Déterminer la distance de la suite u au sous espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites réelles convergentes.

Exercice 8.5

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in E$, telle que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t \neq 0$. On définit $\forall f \in E$,

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \text{ et } N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

Montrer que N et N_φ sont équivalentes sur E.

Exercice 8.6

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que $E = \ker(u - I_d) \bigoplus \operatorname{Im}(u - Id)$.

Exercice 8.7

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. On pose $\forall f \in E, \|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.
1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur E.
2. Soit $f \in E$, on pose $g = f + 2f' + f''$. Montrer que $\forall t \in [0,1]$,

$$f(t) = e^{-t}\int_0^t (t-x)e^x g(x)\mathrm{d}x$$

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq a\,\|f\|.$$

Trouver la valeur optimale de a.
4. Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 8.8

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|A\| = (\mathrm{tr}(\,^tAA))^{1/2}$. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Montrer que ce résultat ne peut être amélioré de manière générale.

Exercice 8.9

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme N. Montrer qu'il existe $k > 0$, tel que, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N(AB) \leq kN(A)N(B).$$

Préciser le k optimal si $N = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|$ (1), et $N = \displaystyle\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$ (n).

Exercice 8.10

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$.
3. Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 8.11

Soit $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On définit sur E les applications suivantes : $\forall u \in E$,

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|,\ \|u\|_1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2},\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.