18 Exponentielles de matrices

Exercice 18.1

1. Montrer qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.
2. En déduire que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18.2

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 18.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Exercice 18.4 (Surjectivité de l'exponentielle matricielle)

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, on définit $B(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k N^k$, et $S(t) = e^{B(t)}$. Calculer $B'(t)$.
2. En déduire que $S''(t) = 0$, puis que $e^{B(1)} = I_n + N$.
3. En déduire que $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe $B \in \mathbb{C}$ tel que $e^B = \lambda I_n + N$.
4. En utilisant le théorème de réduction de Jordan, en déduire que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.
5. Montrer qu'elle n'est pas injective.
6. Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{M^2,\ M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.

Exercice 18.5

Montrer que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bijective.

Exercice 18.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.