21 Compléments sur les groupes

Exercice 21.1

Soit G un groupe, et $g, h \in G$ tels que $gh = hg$ et g et h sont deux éléments d'ordre fini. On suppose que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$. Montrer que gh est d'ordre fini et calculer son ordre.

Exercice 21.2

Soit G un groupe, et $g, h \in G$ tels que $gh = hg$ et g et h sont deux éléments d'ordre fini premiers entre eux. Montrer que gh est d'ordre fini et calculer son ordre. Sans commutation ?

Exercice 21.3

Soit G un groupe, et $g \in G$ d'ordre fini. Soit n un entier naturel. Déterminer l'ordre de g^n.

Exercice 21.4

Déterminer l'ordre de $\bar{k}$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 21.5

Soit G, H deux groupes, $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $g \in G$, $o(\varphi(g)) | o(g)$. Que dire dans le cas d'un automorphisme ?

Exercice 21.6

Soit G un groupe cyclique et soit H un sous-groupe de G. Démontrer que H est cyclique.

Exercice 21.7

1. Soient G et H deux groupes. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H, alors (g, h) est d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 21.8

Soit G un groupe, on définit pour tout $a \in G$, $\varphi_a : x \in G \mapsto axa^{-1} \in G$.
1. Montrer que φ_a est un automorphisme de groupes.
2. Montrer que $a \in G \mapsto \varphi_a \in \text{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes, déterminer son noyau.

Exercice 21.9

Soit G un groupe d'ordre pair, montrez qu'il existe un élément x de $G \setminus \{e\}$ tel que $x^2 = e$.

Exercice 21.10

Soit $(G, .)$ un groupe et A, B deux sous-groupes de G. On note $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 21.11

Soit f un morphisme non constant d'un groupe $(G, .)$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.