23 Intégrales à paramètre

Exercice 23.1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simplifiée de F.

Exercice 23.2

Soit $n \geq 1$, et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + x^2)^n}$.

1. Montrer l'existence de I_n.
2. Calculer $I_1(x)$.
3. Montrer que I_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n'.
4. En déduire la formule générale de $I_n(x)$.

Exercice 23.3

Soit $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t + x} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$, valable sur $[0, \pi/2]$, déterminer un équivalent de f en 0.
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 23.4

On pose pour $a > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} \mathrm{d}t$.

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie une EDO à déterminer. En déduire l'expression de F.

Exercice 23.5

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \arctan(x \tan(t)) \mathrm{d}t$.

1. Étudier le domaine de définition de f, sa continuité et sa dérivabilité.
2. Montrer que : pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(u)}{u^2 - 1} \mathrm{d}u$.
3. En déduire un équivalent de f en 0.
4. Justifier l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2 - 1} \mathrm{d}u$.

Exercice 23.6

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt) \ln(t) \mathrm{d}t$. Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Donner $g(0)$, $g'(0)$.

Exercice 23.7

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{(1 + t^2)t} \mathrm{d}t$. Déterminer une expression simple de F.