2 Intégrales généralisées

Exercice 2.1 (Nature d'intégrale)

Étudier la nature des intégrales suivantes
$(*)$ = on calculera l'intégrale en question.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1} \qquad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}(t))\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\sqrt{x}(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}} \qquad \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^{1/x} \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\mathrm{d}x \ (*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^2} \ (*)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|x-1|}{|x^\alpha - 1|^\beta}\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t, a > 0, \ (*)$$

Exercice 2.2 (Calculs d'intégrale)

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur convergence

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\mathrm{d}x \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \quad \int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$$

Exercice 2.3

Montrer que l'intégrale suivante est convergente. En est-il de même avec les valeurs absolues ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Exercice 2.4

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que les intégrales suivantes existent et sont égales

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}, n \geq 0$$

Exercice 2.5

Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}, \ n \geq 0 \text{ (Centrale PC)} \qquad \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t, \ n \geq 0$$

Exercice 2.6

Existence et calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \text{ (Mines)}$$

Exercice 2.7 (Dirichlet)

On définit, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \quad \text{et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$$

0. Montrer que l'intégrale suivante est convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

1. Monter qu'elles sont bien définies, puis que $(I_n)_n$ est constante.
2. Si $\phi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0$.
3. Montrez que $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, et déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}(I_n - J_n) = 0$.
4. Conclure.

Exercice 2.8

Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, intégrable et non bornée.

Exercice 2.9

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$.
Supposons que f^2 et f'^2 sont intégrables. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2.10 ($**$)

Existence et calcul de

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^{+\infty} x\lfloor 1/x\rfloor \mathrm{d}x$$

Exercice 2.11 (Équivalents)

Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$

Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$

Exercice 2.12 (Log intégral)

On considère, $\forall x \geq 2$, $l_i(x) := \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. Pour $n \geq 1$, donner un développement asymptotique à n termes de l_i au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.13 (Suite d'intégrales)

On définit, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie, puis que $\forall A > 0$,

$$\int_0^A \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)} \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \mathrm{d}t - \int_A^{A+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \mathrm{d}t\right)$$

2. En déduire une nouvelle expression intégrale de u_n.
3. On définit $v_n = nu_n$. Montrer que la série de terme général $v_n - v_{n-1} - \dfrac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 2.14

Trouver une CNS d'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction suivante. Calculer l'intégrale le cas échéant.

$$x \mapsto \frac{1}{(x+1)...(x+n)}$$

Exercice 2.15 (Étude générale)

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

Exercice 2.16 (Si on connaît les intégrales à paramètre (I)..)

On définit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

Montrer que F est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire une nouvelle expression de F.

Exercice 2.17 (Si on connaît les intégrales à paramètre (II)..)

On définit

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u\right)^2$$

Montrer que g est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $h+g$ est constante. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u$