20 Espaces préhilbertiens

20.1 Rappels de sup

Exercice 20.1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité. Montrer que f est un multiple d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 20.2

Pour tous réels a, b, on pose $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$. Calculer le minimum de $I_{a,b}$.

Exercice 20.3

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, espace euclidien de dimension n. Montrer que : $\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n$, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)| \leq \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$.

Exercice 20.4

On considère $\mathbb{R}^4$ comme espace euclidien muni du produit scalaire canonique. Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\, (x + y + z + t = 0) \text{ et } (x + 2y + 3z + 4t = 0)\right\}$.
1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^4$. Exprimer $d(x, F)$.

Exercice 20.5

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un hyperplan dont on déterminera une base orthonormée.
2. Déterminer le projeté de X sur H, et $d(X, H)$.

Exercice 20.6

On considère $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = \left(f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$ est une norme sur E.

Exercice 20.7

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs non nuls d'un espace euclidien E, de dimension n. On suppose que pour tout $x \in E$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 20.8

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $D =$Vect$(1, 0, 1)$, et p le projecteur orthogonal sur D.
1. Exprimer $p(x, y, z)$.
2. Déterminer une matrice de p dans la base canonique de E.

Exercice 20.9

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques.
1. Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E. On pose pour tout $k \geq 1$, $e_{2k-1} : x \mapsto \sin(kx)$ et $e_{2k} : x \mapsto \cos(kx)$.
2. Vérifier que $(e_k)_{k\geq 1}$ est une famille orthonormale.
3. Pour $n \geq 1$, on définit $F_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{1\leq k\leq 2n}$. Étudier la projection orthogonale sur F_n de la fonction χ définie par $\forall x \in]-\pi,\pi],\ \chi(x) = |x|$, 2π périodisé.

Exercice 20.10

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, et $\varphi : (f,g) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$, et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux, et exprimer la projection orthogonale sur G d'un élement quelconque de E.
3. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $E_{a,b} = \{f \in E,\ f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
a) Trouver un élément f_0 de $E_{a,b}$, puis prouver que $E_{a,b} = \{f_0 + h,\ h \in F\}$, et donner la projection orthogonale de f_0 sur F.
b) Déterminer la valeur de $\displaystyle\inf_{f\in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

Exercice 20.11

Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire et que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

20.2 Espaces préhilbertiens

Exercice 20.12

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = M{}^tM$.
1. Montrer que pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(M)$, M et ${}^tM$ ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de M sont orthogonaux deux à deux.

Exercice 20.13

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le $n-$ième polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2.a. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
2.b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice 20.14

Soit A une partie d'un espace préhilbertien E.
1. Montrer que l'orthogonal de A est fermée.
2. Montrer que A et $\bar{A}$ ont le même orthogonal.

Exercice 20.15

On munit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ du p.s. $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction de E définie par $f_n(t) = t^n$, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$.
1. Justifier que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.
2. Déterminer l'othogonal de $\mathcal{P}$.

Exercice 20.16

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.
2.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
2.b. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
2.c. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E,φ).

Exercice 20.17

Soit $E = l^2(\mathbb{N})$
1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\varphi : (u,v) \in E^2 \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur E.
3. On note F le sous espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Déterminer $F^\perp$. Les espaces F et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires ?
4. Soit $v \in E\backslash F$ et $G =$Vect(v). Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp$.

Exercice 20.18

Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que l'ensemble : $\left\{(x,y) \in E^2,\ (x,y) \text{ est libre}\right\}$ est un ouvert de E.

Exercice 20.19

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et p un projecteur sur E. Montrer que p est orthogonal *ssi* $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

20.3 Espaces euclidiens

Exercice 20.20

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Exercice 20.21

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien. Montrer que deux propriétés entraînent la troisième :
(i) : u est une isométrie.
(ii) : $u^2 = -I_d$.
(iii) : $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$.

Exercice 20.22

Déterminer $\text{card}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Exercice 20.23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et A^tA sont orthogonalement semblables.

Exercice 20.24

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det(A) + \det(B) \leq \det(A+B)$.

Exercice 20.25 (Adjoint)

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien.
1. Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur u tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u, x \rangle$.
2.a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une application de E dans E, notée f^* , et une seule telle que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
2.b. Montrer que f^* est linéaire.
2.c. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$.

Exercice 20.26 (Décomposition polaire)

Montrer que toute matrice s'écrit de manière unique comme produit d'une matrice symétrique positive et d'une matrice orthogonale. Cas non inversible ? Unicité ?

Exercice 20.27

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^tAA = I_n$.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes telles que $A^tA = {}^tAA$.

Exercice 20.28

Déterminer $\min \{\text{tr}({}^tMM),\ M \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 20.29

Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 20.30

1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\exp(T)$ est une matrice orthogonale.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto a \wedge x \in \mathbb{R}^3$. Décrire l'application $\exp(\varphi)$.

Exercice 20.31

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}$.
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est symétrique. Montrer que $\|f\|_2 = \rho(f)$.
2. On ne suppose plus que f est symétrique. Montrer que $\|f\|_2^2 = \|f \circ f^*\|_2$.
3. En déduire que $\|f\|_2 = \sqrt{\rho(f \circ f^*)}$.
4. Montrer que $\|f\|_2 = \|f^*\|_2$.