13 Probabilités

Exercice 13.1

Une maladie atteint une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si elle est effectivement présente. Mais on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque son test est positif ?

Exercice 13.2

On dispose de 100 dés dont 25 sont truqués. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

Exercice 13.3

On considère trois urnes :
U_1 : deux boules blanches et trois rouges ;
U_2 : deux boules vertes et quatre blanches ;
U_3 : cinq boules noires et deux rouges. On tire une boule de U_1 et on la met dans U_2. On tire une boule de U_2 et on la met dans U_3. Enfin on tire une boule dans U_3. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de couleurs différentes ?

Exercice 13.4

On se place dans un espace probabilisé.
Soit A, B, C, trois événements. Simplifier la somme :

$$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cup \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cup B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$$

Exercice 13.5

Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ des événements mutuellement indépendants. Soit B l'événement « aucun des événements A_k n'est réalisé ». Montrer que :

$$\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$$

Exercice 13.6

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.
1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la $n-ième$ lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la $n - ième$ lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 13.7

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?

Exercice 13.8

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.
1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n
2. En déduire la valeur de $p_n$en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 13.9

Un QCM propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 13.10

Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu sur F et $\varphi : E \to F$ une application. Montrer que $\mathcal{T}' = \left\{\varphi^{-1}(A),\ A \in \mathcal{T}\right\}$ est une tribu sur E.

Exercice 13.11

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 2/3. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 1/2. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

Exercice 13.12

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements. On note $A = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$. On suppose que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Exercice 13.13

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Démontrer que

$$(1) : \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

$$(2) : \quad \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1).$$

Exercice 13.14

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout évènement A et B,

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 13.15

Soit $p \in]0, 1[$ et X telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = p^2 k(1 - p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X suit une loi de probabilité
2. Montrer l'existence et calculer l'espérance de $X - 1$.
3. Montrer l'existence et calculer l'espérance de $(X - 1)(X - 2)$.
4. En déduire l'existence et l'espérance et de la variance de X.

Exercice 13.16

Soit $p \in]0, 1[$. On lance une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Soit X le nombre de faces qui ont été obtenues lorsque l'on obtient le second pile. Montrer l'existence et calculer l'espérance de X.

Exercice 13.17

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ strictement positifs. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 13.18

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q.
1. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 13.19

Soit $N \geq 1$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *iid* suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots N\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$M_n = \max(U_1, \dots, U_n).$$

Déterminer les limites de $\mathbb{E}(M_n)$ et de $V(M_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 13.20

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Pour $n \in \mathbb{N}$, identifier la loi de X sachant $(X + Y = n)$.

Exercice 13.21 (Problème du collectionneur)

Chez le marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte N images distinctes.
1. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir la collection complète en un nombre fini d'achats.
On limite l'étude à un espace probabilisé dans lequel la collection complète est toujours obtenue en un nombre fini d'achats. Pour $k \in \{1, \dots, N\}$, on note $X_k \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'achats ayant permis d'obtenir k images distinctes.
2. Pour $k \in \{1, \dots, N - 1\}$, quelle est la loi de $X_{k+1} - X_k$?
3. En déduire une expression de l'espérence de X_N.

Exercice 13.22

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right).$$

Exercice 13.23

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, *iid*, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.
1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. En déduire les lois de U et V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 13.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires *iid* selon la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(\det(A))$ et $V(\det(A))$.

Exercice 13.25

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que Y conditionnée à $(X = n)$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Quelle est la loi de Y ?

Exercice 13.26

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On suppose que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $0,25$.
1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
a. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
b. Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
a. Exprimer la probabilité conditionnelle de $(Z = k)$ sachant que $Y = n$.
b. En déduire la probabilité de $(Z = k \text{ et } Y = n)$.
c. Déterminer la loi de Z.
3. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 13.27

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.
1. Montrer que X définit une probabilité.
2. Calculer la fonction génératrice de X, quel est son rayon de convergence ?
3. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 13.28

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on pose $Y = X/2$ si X est paire, 0 sinon. Donner la loi de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 13.29 (Urne d'Ehrenfest)

Une urne contient N boules indiscernables au toucher, de couleur bleue ou rouge. On répète la manipulation : tirer une boule au hasard de l'urne et la remplacer par une boule de la couleur opposée. On note X_n le nombre de boules bleues après la $n-$ième manipulation.
1. Donner $\mathbb{P}(X_{n+1} = i)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = i \pm 1)$.
2. Soit $U_n = (\mathbb{P}(X_n = 0), \ldots, \mathbb{P}(X_n = N))$. Déterminer $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
3. On se place dans $\mathbb{R}_N[X]$, muni de la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$. Identifier l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_N[X]$ de cette matrice A.
4. Soit G_n la fonction génératrice de X_n. Montrer que $G_{n+1} = \varphi(G_n)$, et trouver une relation de récurrence entre $\mathbb{E}[X_{n+1}]$ et $\mathbb{E}[X_n]$.

Exercice 13.30

Soit $\alpha > 0$.
1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.
2. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$ quand $n \to +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\forall \lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 13.31

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante de $Y \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in (0, 1)$ et $\lambda > 0$.
1. Démontrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$.
2. En déduire l'espérance et la variance de Z.

Exercice 13.32

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, \ldots, n, \ldots$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres, et que $\mathbb{P}(n\text{-ième saut}) = \dfrac{1}{n}$. Soit X le dernier saut réussi. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X), V(X)$.