6 Réduction des endomorphismes

6.1 Sans la notion de polynôme d'endomorphisme

Exercice 6.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. On définit u par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ u(M) = \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$$

1. Déterminer les élements propres de u.
2. Donner une CNS sur A pour que u soit diagonalisable.

Exercice 6.2

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit la fonction T_f sur $\mathbb{R}^+$ par $T_f(0) = f(0)$, et

$$\forall x > 0,\ T_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 6.3

Soit $n \geq 3,\ a \in \mathbb{C}$, et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de M ? Préciser $\mathrm{Im}(M)$ et $\ker(M)$.
2. Donner les valeurs propres de M.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 6.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit par blocs les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B' = P^{-1}BP$. Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{0\}$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, préciser $\dim(\ker(B' - \lambda I_{2n}))$ en fonction de $\dim(\ker(A - \lambda I_n))$.
3. En déduire que B est diagonalisable ssi A l'est.

Exercice 6.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ ssi $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. En déduire que B est diagonalisable ssi (A est diagonalisable et inversible). On pourra distinguer le cas ou 0 est valeur propre de A.

Exercice 6.6

Soit $n \geq 2$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de rang 1.
1. Montrer que 0 est valeur propre de f et préciser la dimension de $E_0(f)$. Que peut-on en déduire ?
2. Trouver une CNS de diagonalisabilité de f.
3. En déduire que $f^2 = \mathrm{tr}(f)f$.

Exercice 6.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$, et u et v deux endormorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = u$.
1. Montrer que pour tout n, $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$.
2. Montrer que u est nilpotent. On pourra exploiter φ, l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à f associe $f \circ v - v \circ f$.

Exercice 6.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable. Montrer que :

$$(\mathrm{tr}(A))^2 \leq \mathrm{rg}(A)\mathrm{tr}(A^2)$$

Exercice 6.9

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphsime de E, diagonalisable, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u.
1. Soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ un élément de E. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$.
2. Montrer que les valeurs propres de u sont simples, ssi on peut trouver $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Exercice 6.10

Soit $n \geq 2$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. AB et BA ont-elles les mêmes valeurs propres ?
Application : montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$

Exercice 6.11 (*)

Soit $n \geq 2$. Déterminer le spectre de la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en fonction de celui de A.

Exercice 6.12

L'ensemble des matrices diagonalisables est-il convexe ? connexe ?

Exercice 6.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \text{ est nilpotente ssi } \forall p \in \{1, \ldots, n\},\ \mathrm{tr}(A^p) = 0$$

Exercice 6.14

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, où E est réel, de dimension $n \geq 1$. On supose que $u \circ v = v \circ u$, et v nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det(u)$. On discutera en fonction de l'inversibilité de u.

Exercice 6.15

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement posifis telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A, et que toute autre valeur propre complexe λ de A vérifie $|\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A avec $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.
3. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est une droite.

Exercice 6.16

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f un automorphisme de E, et g un endomorphisme de rang 1. Montrer que $f + g$ est un automorphisme ssi $\mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Exercice 6.17

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

6.2 Avec la notion de polynôme d'endomorphisme

Exercice 6.18

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre. Montrer que les polynômes en u sont les seuls endomorphismes qui commutent avec u.

Exercice 6.19

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie $n \geq 1$.
1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que les noyaux de f et f^2 sont égaux.
2. Par un exemple, montrer que si f^2 est diagonalisable, f ne l'est pas forcément.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et inversible. Montrer que f est diagonalisable.
4. On suppose que f^2 est diagonalisable et $\ker(f) = \ker(f^2)$. Montrer que f l'est.
Application : soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable ssi AB l'est.

5. On suppose désormais que le corps de base est $\mathbb{R}$. On suppose que u^2 est diagonalisable. Montrer que

$$u \text{ est diagonalisable ssi } \mathrm{Sp}(u^2) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2).$$

Exercice 6.20

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie $n \geq 1$ tel que :

$$\forall \lambda \in \ \mathrm{Sp}(f), \ \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E) = \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E)^2$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 6.21

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M^5 = M^2 \text{ et } \mathrm{tr}(M) = n$$

Exercice 6.22

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$M^5 + M^3 + M - 3I_n = 0 \text{ et } {}^t\bar{M} = M$$

Exercice 6.23

Soit $n \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + 4M$ soit diagonalisable. On pose $N = M + 2I_n$.
1. Supposons M diagonalisable, montrer que :

$$\ker(M + 2I_n) = \ker((M + 2I_n)^2)$$

2. Montrer que la réciproque est vraie.

Exercice 6.24

Soient A et B deux matrices carrées complexes de taille n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes ssi la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Exercice 6.25

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F et G, deux sous-espaces supplémentaires de E, stables par u. On note π_u, le polynôme minimal de u, et π_F, π_G, les polynômes minimaux des endormorphismes induits par u sur F et G. Montrer que

$$\pi = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G).$$

Exercice 6.26

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel non trivial, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = Id_E$.
1. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$.
2. En déduire que g n'admet pas de polynôme minimal. Est-ce cohérent avec le cours ?

Exercice 6.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $p \geq 1$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ est nilpotent.

Exercice 6.28

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On suppose que f possède exactement n valeurs propres distinctes. Montrer que $C(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 6.29

Trouver les entiers naturels n pour lesquels il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$f^3 + f^2 - Id_{\mathbb{R}^n} = 0 \text{ et } \mathrm{tr}(f) \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 6.30

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
1. Montrer que l'inverse d'un polynôme en u est un polynôme un u.
2. Trouver une CNS sur $P \in \mathbb{K}[X]$ pour que $P(u)$ soit inversible.

Exercice 6.31

Soit $n \geq 1$, et E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n. On suppose que $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P'(u) \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer que :

$$P(u) \text{ est diagonalisable ssi } u \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 6.32 (Codiagonalisation - Possible sans polynôme annulateur)

Soit u et v deux endormorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$u \circ v = v \circ u \text{ ssi } u \text{ et } v \text{ sont codiagonalisables.}$$

Exercice 6.33

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6.34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f(M) = AM$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. L'application f est-elle un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Étudier l'équivalence entre les inversibilités de A et de f.
3. Étudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de A et de f.

Exercice 6.35

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un projecteur de E. On définit, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme φ par :

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$$

1. φ est-il diagonalisable ?
2. Préciser les valeurs propres de φ.