4 Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 4.1 (Liberté)

Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \mapsto e^{x/n}$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq 1}$ est libre.

Exercice 4.2

Soit E un espace vectoriel, et p, q, des projecteurs de E.
1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Dans ce cas, montrer que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$, et $H_1, H_2, ..., H_k$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) \geq n-k.$$

Exercice 4.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A+X) = \det(X).$$

Montrer que A est nulle.

Exercice 4.5

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 4.6

Montrer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.7

Calculer le déterminant de la matrice $(\mathrm{pgcd}(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 4.8

Soient E un espace vectoriel de dimension n, finie, et f et g deux endormorphismes de E.
1. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

2. On suppose que $f+g$ est inversible, et $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

Exercice 4.9

Soient E un espace vectoriel non nul, et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 4.10

Soit E un espace de dimension finie. Déterminer les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E.

Exercice 4.11

Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^p(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent.

Exercice 4.12

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

Exercice 4.13

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a.\mathrm{tr}$.

Exercice 4.14 (Lemme de Hadamard)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1\ldots,n\}\,,\ |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4.15

Soit A une matrice carrée de taille n. Étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 4.16

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \mathrm{com}(M)$ $(n \geq 2)$.

Exercice 4.17

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 4.18

Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leq j,k\leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4.19

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4.20

Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 4.21

Soit $n \geq 2$. Montrer que les comatrices de deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont aussi semblables.

Exercice 4.22

Prouver qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 4.23

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 4.24

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \geq 1$, telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. On définit $C(f) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ f = f \circ v\}$. Montrer que $C(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 4.25

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$ et $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$\det(A^p + B^p) \geq 0.$$

Exercice 4.26 (Déterminants circulants)

Calculer le déterminant de la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$

On pourra introduire J $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^2 k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$, $k \in \{0, \ldots n-1\}$, écrire $A = P(J)$ où P est un polynôme à préciser, et diagonaliser A dans la base des (X_k).