10 Révisions d'analyse

10.1 Continuité, dérivabilité, limites, développements limités

Exercice 10.1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite réelle $l \to [0, 1[$, quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10.2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout réel x positif, $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.3

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.4

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$.

En remarquant que $f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Exercice 10.5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que P' est scindé. Réciproque ? Qu'en est-il sur $\mathbb{C}$?

Exercice 10.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq M_1 := \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 10.7

Étudier la continuité de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 1 - x\lfloor \dfrac{1}{x} \rfloor$.

Exercice 10.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. Montrer que f est constante.

Exercice 10.9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right)^{\tan(3x)} \qquad \lim_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x \quad \text{où } a, b, c > 0$$

Exercice 10.10

Mener l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) \quad g(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{x+1} \quad h(x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad i(x) = x^x$$

10.2 Calcul d'intégrales

Exercice 10.11

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \sin^5(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x \qquad \int x\arcsin(x)\mathrm{d}x \qquad \int x\arctan(x)\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)} \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$\int_{a+1}^{a+2} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh(x)-\cosh(a)}, a \neq 0 \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \qquad \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 10.12

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.
Étendre ce résultat par densité à l'ensemble des fonctions continues.

Exercice 10.13

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, puis trouver un DL à l'ordre 2 en I_n.

Exercice 10.14 (Intégrales de Wallis)

Soit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Déterminer une expression explicite de W_n en fonction de n.

En déduire la nature des séries suivantes :

$$\sum_n W_n \text{ et } \sum_n (-1)^n W_n.$$

Exercice 10.15

Déterminer la limite de $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}$. Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$.