17 Révisions de probabilités

17.1 Dénombrement

Exercice 17.1 (Crible de Poincaré)

Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et $A_1, \ldots, A_n$, n parties de E. Montrer :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \operatorname{card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

Exercice 17.2 (Dénombrement de surjections *)**

On se propose de chercher le nombre $S_{n,p}$ de surjections de $I_n = \{1, \ldots, n\}$ sur $I_p = \{1, \ldots, p\}$, où n et p sont des entiers naturels non nuls.
1. Calculer $S_{n,p}$ pour $p > n$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ (pour le dernier cas, regarder les applications non surjectives !).
2. Calculer $S_{p+1,p}$.
3. En considérant la restriction à I_{n-1} d'une surjection de I_n dans I_p, montrer que :

$$\forall n > 1,\ \forall p > 1,\ S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$$

4. Montrer que $\forall n \geq 1,\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{k}{j}S_{n,j} = k^n$.
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^n\binom{n}{k} = n!$. On pourra utiliser un dl en 0 à l'ordre n de $(e^x-1)^n$.
6. Montrer que, $\forall p \leq n$, $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k^n\binom{p}{k}$.

Exercice 17.3

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Exercice 17.4

Soit E un ensemble à n éléments, $(n \geq 1)$. Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 17.5

Soit E un ensemble à n éléments, $(n \geq 1)$. Calculer

$$S_1 = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \operatorname{card}(X\cap Y) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \operatorname{card}(X\cup Y).$$

Exercice 17.6

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq 1/2$.

17.2 Probabilités et variables aléatoires

Exercice 17.7

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n.
1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B.
5. On note $\Phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que : $\Phi(n) = n \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Exercice 17.8

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Exercice 17.9

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

Exercice 17.10

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 17.11

On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, et C d'un triangle suivant le procédé suivant :
- si la particule se trouve en B, elle y reste ;
- si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable ;
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

À la première seconde, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets. Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "à la n-ième seconde, la particule se trouve en A" (resp. B et C). On note a_n, b_n et c_n les probabilités de A_n, B_n et C_n.
1. Que valent a_1, b_1 et c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n et c_n.
3. En déduire la convergence des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, et $(c_n)_n$ et leurs limites.

Exercice 17.12

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?