1 Séries numériques

Exercice 1.1

Étudier la nature des séries suivantes :
$(*)$ = on calculera la somme de la série.

$$\sum_n \sin((2+\sqrt{3})^n\pi) \qquad \sum_n \sin(\pi e n!) \qquad \sum_n \sin(2\pi e n!) \qquad \sum_n \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

$$\sum_n (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \ (*) \qquad \sum_n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \qquad \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(*) \qquad \sum_n \frac{3^n+4n}{5^n-6n^9}$$

$$\sum_n \mathrm{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} \qquad \sum_n \frac{\cos(n^2\pi)}{n.\ln(n)} \qquad \sum_n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right),\ a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, (*)$$

Exercice 1.2

Étudier la nature de la série de terme général $1/u_n$ avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$

Exercice 1.3

On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}$ et on définit par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

Étudier la nature des séries :

$$\sum_n u_n \qquad \sum_n (-1)^n u_n$$

Exercice 1.4

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Exercice 1.5

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs. On suppose que $\sum_n u_n$ converge.

$$\text{Montrons que } \sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n} \text{converge}$$

Exercice 1.6

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels, on définit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{1+n^2.u_n}$$

Montrer que si, $\sum_n u_n$ diverge, on ne peut rien dire. Si elle converge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Exercice 1.7

Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}\right)_{n\geq 1}$ converge ssi $\alpha > 7/2$

Exercice 1.8

Montrer que la série de terme général $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$, où $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})^2$, converge ssi $\deg(P) < \deg(Q)$

Exercice 1.9

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection.
1. Montrons que : $\displaystyle\sum_n \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.
2. Montrons que : $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\varphi(n)}$ converge.

Exercice 1.10

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} u_n$.
1. Montrer que (u_n) converge.
2. On pose $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$. En remarquant que (v_n) converge ssi $\displaystyle\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est une série convergente, montrer que (v_n) converge vers l.
3. Donner un équivalent de (u_n) en fonction de l, et déterminer la nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n.u_n$

Exercice 1.11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$ telle que $f(0) \neq 0$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n)\mathrm{d}t$$

Exercice 1.12

Soit (u_n) une suite décroissante et positive, supposons que $\displaystyle\sum_n u_n$ converge. Montrons que $(nu_n)_n$ tend vers 0. Sans décroissance ?

Exercice 1.13

Soit (u_n) une série à termes positifs convergente. Peut-on préciser la nature de la série de terme général $v_n = u_0 u_1 ... u_n$?

Exercice 1.14

Soit $(u_n)_n \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général u_n diverge. On définit $S_n = u_0 + ... + u_n$. Étudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Exercice 1.15

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{1/n}$$

Exercice 1.16 (Si on connait les intégrales généralisées ... !)

Soit $a > 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)}$. En déduire la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Exercice 1.17 (Si on connait la transformation d'Abel... !)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k}$

En observant que $(\Sigma_n)_n$ est bornée, montrer que la suite $(S_n)_n$ converge

Exercice 1.18 (Si on connait le théorème de Césaro... !)

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$. En étudiant $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, étudier la converge de la série de terme général u_n.

Exercice 1.19

Justifier la convergence de la série suivante et calculer la somme.

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{1^2 + 2^2 + ... + k^2} \; (= 18 - 24\ln(2))$$

Exercice 1.20 (Si on connait les intégrales généralisées ... !)

Étudier la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{n/k}$

Exercice 1.21 (Si on connait les intégrales généralisées ... !)

Déterminer la nature des séries de terme généraux

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad\qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$$

Compléments sur les suites numériques

Exercice 1.22

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tout couple d'entiers naturels (n,m). Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $l = \inf\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 1.23

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3, \ldots$. Elle prend une fois la valeur 1, deux la valeur 2, trois fois la valeur 3 et ainsi de suite. Donner une expression du terme général et un équivalent de u_n.

Exercice 1.24

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1.25

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique de (u_n).

Exercice 1.26

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, pour tout entier naturel n. Étudier cette suite et donner un développement asymtotique de u_n à deux termes.

Exercice 1.27

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe convergeant vers l. Étudier la convergence de (b_n) définie par :

$$b_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k, \ \forall n \geq 0.$$

Exercice 1.28

Calculer la limite de

$$\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right)_{n\geq 1}$$

Exercice 1.29

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Étudier la suite (u_n).

Exercice 1.30

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$.