5 Séries entières

Exercice 5.1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)^n z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^4} z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \sin(t) t^n \mathrm{d}t\right) z^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n},\ a,b \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n) z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n z^{3n}}{2^n n}$$

Exercice 5.2

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série $\sum_n b_n z^n$. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$, puis l'égalité.

Exercice 5.3 (Produit de Hadamard)

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq R_1 R_2$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 5.4

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ de la variable réelle et préciser l'intervalle de convergence dans chacun des cas suivants :

$$a_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad a_n = \arctan(n) \qquad a_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 5.5

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ où :

1. a_n est définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$.
2. a_n est le nombre de diviseurs de n.
3. a_n est la $n-ième$ décimale de $\sqrt{n}$.

Exercice 5.6

Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \in \mathbb{R} \text{ au voisinage de 0 (Mines).}$$

Exercice 5.7

On notera pour tout entier naturel n, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$ et étudier le bord du rayon de convergence (réel).
2. On note f la somme de la série (sous réserve de convergence). Calculer $(1-x)f(x)$ et en déduire f.

Exercice 5.8

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in^2x} e^{-n}$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall k \geq 1,\ \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 5.9

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\exists C, A > 0,\ \text{tel que pour tout entier naturel } n,\ \|f\|_\infty \leq CA^n.n!$$

Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 5.10

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) \leq e^{x^2/2}.$$

Exercice 5.11

On considère

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$.
3. Déterminer une expression simple de f' puis de f. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 5.12

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Déterminer de deux manières (produit de Cauchy/équation différentielle) un développement en série entière de f. En déduire l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ (Mines).}$$

Exercice 5.13 (tangente)

Soit $a_0 = 1$. On définit a_n par :

$$\forall n \geq 1,\ a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est supérieur à 1.
2. Montrer que pour tout $|z| < R$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{1+e^z}$.
3. En déduire l'expression du développement en série entière de tan sur l'intervalle $]-R, R[$.

Exercice 5.14 (Dérangements)

Soit n et k des entiers avec $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots n\}$ ayant k points fixes.

1. Montrer que $\displaystyle n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$

2. Montrer que $D_n, k = \displaystyle\binom{n}{k} D_{n-k,0}$

3. On considère f la somme de la série génératrice de $\left(\frac{D_{n,0}}{n!}\right)$. Montrer que son rayon de convergence vaut au moins 1, puis calculer $e^x f(x)$, pour tout réel x de l'intervalle $]-1, 1[$.
4. En déduire une expression de $D_{n,0}$. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n ?

Exercice 5.15

Déterminer un équivalent en 1^- de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Exercice 5.16

Soit A une matrice carrée complexe de taille $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série suivante en fonction de χ_A : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Exercice 5.17

Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0.

$$f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad g : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Exercice 5.18 (Nombres de Bell)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, où $B_0 = 1$.
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
2. Montrer que le rayon de convergence de la série génératrice de $\left(\dfrac{B_n}{n!}\right)_n$ est supérieur à 1.
3. Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f puis donner une expression de B_n.