11 Structures

Exercice 11.1

Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $(H \cup K)$ est un sous groupe de G ssi $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 11.2

Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

Exercice 11.3

Soit $A = \left\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$
1. Montrer que A est un anneau intègre.
2. On définit, $\forall x = a + b\sqrt{2} \in A$, $N(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $\forall x, y \in A, N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que $x \in A$ est inversible ssi $N(x) = \pm 1$.

Exercice 11.4

Soit K un corps fini. Calculer $\displaystyle\prod_{x \in K^*} x$.

Exercice 11.5

Soit A un anneau commutatif.
1. On suppose que A n'admet que les idéaux triviaux $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps.
2. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 11.6

Soit $(I_n)_n$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Démontrer que la suite est stationnaire.

Exercice 11.7

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et I et J deux idéaux de A. On note $I + J = \{i + j, i \in I, j \in J\}$, et $I.J = \{i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n, n \geq 1,\ i_k \in I, j_k \in J\}$.
1. Montrer que $I + J$ et $I.J$ sont des idéaux de A.
2. Montrer que $I.J \subset I \cap J$.
3. Montrer que si les idéaux I et J sont étrangers, $I.J = I \cap J$.

Exercice 11.8

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe stricte de G. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H.

Exercice 11.9

Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, .)$ à valeurs dans $(\mathbb{C}^*, .)$. Calculer $\displaystyle\sum_{x \in G} f(x)$.

Exercice 11.10

Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A, on appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}$.
1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que

$$\sqrt{I.J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

Exercice 11.11

Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents .
1. Monrer que xy est nilpotent.
2. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que $1_A - x$ est un élément inversible de A.
4. Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit u, v tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 11.12

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \omega| < 1$.
4. Soient $u, v \in \mathbb{Z}[i]$, $v \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$.
5. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

Exercice 11.13

1. Soit G un groupe et g un élément de G. Soit φ_g l'application de G dans G définie par $h \mapsto ghg^{-1}$. Montrer que φ_g est un automorphisme de groupes. Si le groupe G est commutatif, que vaut φ_g ?
2. Soit $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de G. Soit $\varphi : G \to Aut(G)$ définie par $\varphi(g) = \varphi_g$. Montrer que φ est un morphisme de groupes. On appelle centre son noyau. Montrer que c'est un groupe distingué.