3 Suites et séries de fonctions

3.1 Suites

Exercice 3.1

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 3.2

On pose

$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ si } x \neq 0,\ 0 \text{ sinon}$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$, sur $[-a, a],\ a > 0$.

Exercice 3.3

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

Exercice 3.4

On pose, $\forall n \geq 1$,

$$f_n(x) = nx^n \ln(x), \quad \text{si } x \neq 0,\ 0 \text{ sinon}$$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$
2. Étudier la convergence uniforme de la suite sur $[0, 1]$, puis sur $[0, a],\ 0 \leq a < 1$

Exercice 3.5 (avec paramètre)

Soit $\alpha \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. Trouver une CNS sur α de convergence uniforme de la suite.

Exercice 3.6 (Contre-exemple)

On définit, $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Montrer que les (f_n) sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que la suite converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3.7 (*)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$$

Exercice 3.8 (*)

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$, et (f_n), une suite de fonctions $M-$lipschitzienne de $[\alpha, \beta]$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $[\alpha, \beta]$, cette convergence est en fait uniforme. On pourra introduire une subdivison de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Exercice 3.9 (Une équation différentielle)

On définit (u_n), suite de fonctions sur $[0, 1]$, par $u_0(x) = 1$, et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire la convergence simple de (u_n) sur $[0, 1]$. On note u la limite. Montrer que la convergence est uniforme, puis que u est non nulle.
3. Montrer que u est solution de l'équation différentielle $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 3.10 (Une équation fonctionelle)

Trouver toutes les fonctions f continues sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(x^k)}{2^k}$$

Exercice 3.11

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a, b])^{\mathbb{N}}$, qui converge uniformément. Que dire de $\left(\sup_{[a,b]} f_n\right)_n$, $\left(\inf_{[a,b]} f_n\right)_n$?

Exercice 3.12

Soit $n \geq 1$, et $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n). Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$. En déduire que la convergenve des (f_n) n'est pas uniforme. En fournir une preuve directe.

Exercice 3.13 (Polynôme de Bernstein - Weierstrass)

Soit f une fontion continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit, pour tout entier naturel n non nul, le $n - i\grave{e}me$ polynôme de Bernstein associé à f par :

$$\forall x \in [0, 1],\ B_n(f)[x] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Calculer $B_n(1)$, $B_n(X)$, et $B_n(X^2)$. En déduire la convergence uniforme de B_n vers f.
Application : Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 3.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On définit pour tout entier naturel n non nul,

$$f_n : x \mapsto n \int_x^{x+1/n} f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.15

On définit la suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$u_0 = I_d \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0,\ u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1 + u_n(x)}.$$

1. On définit $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Montrer que, $\forall t \in \left]0,1\right]$, $t \leq \varphi(t) \leq 1$.
2. Montrer que (u_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$, mais pas uniformément (double limite).
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 1/u_n$. Montrer que

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |v_{n+1}(x) - 1| \leq \frac{1}{4} |v_n(x) - 1|$$

4. En déduire que (v_n) puis (u_n) converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$

3.2 Séries

Exercice 3.16

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer qu'elle est continue sur ce domaine et strictement décroissante.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

Exercice 3.17

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

1. Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un développement limité de f à l'ordre 2 en 0. On rappelle que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3.18

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
3. Préciser la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et déterminer un équivalent de f. (On pourra étudier $g(x) = f(x)e^x$)

Exercice 3.19

Soit f une fonction continue en 0 telle que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(2t) - f(t)}{t} = 0.$$

Étudier la dérivabilité de f en 0.
On pourra étudier $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ où $u_n : t \mapsto \frac{f(t/2^n) - ft(t/2^{n+1})}{t}$

Exercice 3.20

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

1. Montrer que f est bien définie et impaire. Déterminer les variations de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
4. Préciser $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Illusatration graphique.

Exercice 3.21

On considère la série de fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

1. Étudier sa convergence simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. Même question sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3.22

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + e^{it}} \mathrm{d}t$$

Exercice 3.23

Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 3.24 (Produits)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie sur $]1,+\infty[$ par

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x^k}\right)$$

1. Montrer que la suite converge simplement sur $]1,+\infty[$. On pourra utiliser l'inégalité valable pour tout réel x, $1+x\leq e^x$. On note alors :

$$u(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{x^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x), \text{ pour tout } x>1.$$

2. Étudier la monotonie de u.
3. Soit $a>1$. Montrer que (u_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$. En déduire que u est continue.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
5. Montrer que la convergence de la suite (u_n) n'est pas uniforme au voisinage de 1 (double limite) et déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} u(x)$

Exercice 3.25 (*)

On définit $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(n+1)}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la somme S de la série des (u_n).
2. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3.26

On définit

$$\forall x>-1,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$$

1. Montrer que S est définie et continue sur le domaine.
2. Étudier la monotonie de S et calculer $S(x+1)-S(x)$.
3. Déterminer un équivalent de S en -1^+.
4. Calculer $S(n)$, pour tout entier naturel n, et déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.