15 Topologie

15.1 Continuité

Exercice 15.1

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, $f : E \to \mathbb{K}$, une forme linéaire. Montrer que f est continue ssi $\ker(f)$ est fermé dans E.

Exercice 15.2

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, et f définie par : $\forall x \in E,\ f(x) = \dfrac{x}{1 + \|x\|_E}$.
Montrer que f est une bijection de E sur la boule unité ouverte et qu'elle est lipshitzienne.

Exercice 15.3

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, A un fermé de E, et $f : A \to A$ une application $k-$lipschitzienne, avec $k < 1$.
1. Montrer que f admet au plus un point fixe.
2. Soit $u_0 \in A$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 0} \|u_{n+1} - u_n\|_E$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers l, point fixe de f.

Exercice 15.4

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $K \subset E$, un fermé borné non vide de E, et $f : K \to K$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, c.
2. Soit x_0 dans K, et, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers c.

Exercice 15.5

Soit E un espace vectoriel normé, et $h : E \to E$ une application continue admettant une limite l en 0 et vérifiant $\forall x \in E,\ h(x) = h(x/2)$. Démontrer que h est constante.

Exercice 15.6 (Topologie matricielle)

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})}$ est fermé mais non compact (pour $n \geq 2$).
3. Montrer que est $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ compact. Est-il convexe ?
4. Soit $0 \leq p \leq n$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
7. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques ($\forall i, j,\ a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i, \sum_j a_{i,j} = 1$) est un convexe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

15.2 Compacité

Exercice 15.7

Soit $E = (\mathcal{C}^0(0, 2\pi), \|.\|_2)$. Pout tout entier naturel n, on définit $f_n = e^{in\cdot}$.
1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour tout entiers naturels n et p.
2. En déduire que $\overline{B_0(0,1)}$ n'est pas compacte.

Exercice 15.8

Soit E un espace vectoriel normé.
1. Montrer que la somme de deux fermés n'est en général pas fermée.
2. Montrer que la somme d'un fermé et d'un compact est fermée.
3. Montrer que la somme de deux compacts est compacte.

Exercice 15.9

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermée de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Exercice 15.10

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenue dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\overline{B(0,r)}$.

Exercice 15.11

Soient K et L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que :

$$d(L, K) := \inf_{x \in K, y \in L} \|x - y\| > 0.$$

Exercice 15.12

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ l'est en fait globalement.

Exercice 15.13

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E. Montrer que si une suite (u_n) d'éléments de K n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Exercice 15.14

Soit $(E, \|.\|)_E$ un espace vectoriel normé, et K une partie compacte non vide de E.
1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermé, non vides, de K. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction g continue de K dans $\mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 15.15

1. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, continue coercive. Montrer que f admet un minimum.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie l en $+\infty$. Démontrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

15.3 Connexité par arcs

Exercice 15.16

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.
1. Montrer que $A+B$ est connexe par arcs.
2. L'intérieur de A est-il connexe par arcs ?

Exercice 15.17

Soit E un espace vectoriel normé.
1. L'union de deux parties connexes par arcs de E l'est-elle ?
2. On suppose que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes par arcs de E, tels que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 15.18

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Montrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Exercice 15.19 (Théorème de Darboux)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On introduit $A = \{(x,y) \in I \times I \mid x < y\}$.
1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. On définit $g : (x,y) \in A \mapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathbb{R}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 15.20 (*)

Soit E un espace vectoriel normé, et A une partie de E, elle est dite connexe si les seuls ouverts et fermés de A sont A et $\emptyset$.
1. Montrer que A est connexe ssi A ne peut pas s'écrire comme l'union de deux ouverts non vides, disjoints ssi A ne peut pas s'écrire comme l'union de deux fermés non vides, disjoints ssi toute fonction continue de A dans $\{0,1\}$ (pour la topologie discrète) est constante.
2. Montrer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.
3. Montrer que toute partie connexe par arcs est connexe.
4. Soit A une partie connexe, et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.
5. Montrer que dans un espace vectoriel normé, un ouvert est connexe ss'il est connexe par arcs.

Exercice 15.21

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On dit qu'une suite (u_n) est à évolution lente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_{n+1}-u_n\| = 0$. Pour une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$, on note $V(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, (on rappelle que c'est un fermé de E). Le but de l'exercice est de démontrer que si une suite u est bornée et à évolution lente, alors l'ensemble $V(u)$ est connexe. On effectue un raisonnement par l'absurde ; on suppose que $V(u)$ n'est pas connexe.
1. Démontrer qu'il existe deux compacts K_1 et K_2 vérifiant $K_1 \cup K_2 = V(u)$ et $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.
2. Démontrer que la distance entre K_1 et K_2 est strictement positive. Elle sera notée a.
3. On note $\Omega_{1/2} = \left\{x \in E, d(x, K_{1/2}) < a/3\right\}$. On considère M un majorant de la suite. Démontrer que $K = \overline{B(0,M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ est un compact.
4. Démontrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K et conclure.

15.4 Ouverts, fermés, voisinages

Exercice 15.22

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que :
1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 15.23

1. Montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel est fermée ssi $\partial A \subset A$.
2. Montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel est ouverte ssi $\partial A \cap A = \emptyset$.
3. Montrer que la somme algébrique de deux ouverts est un ouvert.
4. Montrer que ce n'est pas le cas en général pour des fermés ; on pourra considérer $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\right\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Exercice 15.24

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Exercice 15.25

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E, \mid f(0) = 0\}$.
1. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$. Démontrer que F est fermé dans E.
2. On munit E de la norme $\|.\|_1$. Démontrer que F est dense dans E.

Exercice 15.26

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est d'intérieur non vide. Démontrer que $F = E$.

Exercice 15.27

Soit $(E, \|.\|_E)$ un EVN et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf\limits_{x \in A, y \in B} \|x - y\|_E > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 15.28

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Démontrer que A et B sont fermés : $A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$.

Exercice 15.29

Soit E un espace vectoriel normé, soit A une partie non vide et bornée de E.
1. Démontrer que $\overline{A}$ et ∂A sont également bornés.
2. Comparer $\operatorname{diam}(A)$, $\operatorname{diam}(\overline{A})$, et $\operatorname{diam}(\mathring{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.

Exercice 15.30

Soit X une partie d'un EVN. Montrer que $\mathring{X}$ est la réunion des ouverts inclus dans X. En déduire que $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X. De même, montrer que $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant X.