

22 Fonctions vectorielles

Exercice 22.1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2 & x & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.
2. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 22.2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $\|f(1)\| = 1$. Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f'\|_\infty \geq 4$.

Exercice 22.3

Soit u, v, w trois fonctions de classe \mathcal{C}^2 de $[a, b]$ vers \mathbb{R} (avec $a < b$). On suppose :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ vérifiant :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 22.4

Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, {}^t M(t)M(t) = I_{2n+1}$. Montrer que, pour tout réel t , la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.