24 Applications linéaires

Exercice 24.1 (Noyaux itérés)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).
1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+1} \Longrightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$.
À partir d'ici, on suppose de plus que E est de dimension finie n.
3. Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(k \leq p \Longrightarrow N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Longrightarrow N_k = N_{k+1}\right)$.
4. Montrer que $p \leq n$.
5. Montrer que si $k < p$, $I_{k+1} \underset{\neq}{\subset} I_k$ et si $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.

Exercice 24.2

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que $\ker(f^2) = \ker(f) \Leftrightarrow \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

Exercice 24.3

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs sur E. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$. Exprimer dans ce cas $\ker(p+q)$ et $\mathrm{Im}(p+q)$.

Exercice 24.4

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.

Exercice 24.5

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$.

Exercice 24.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent. Montrer que l'indice de nilpoitence est inférieur la dimension.

Exercice 24.7

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 24.8

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 24.9

Montrer qu'une forme linéaire non nulle est surjective.

Exercice 24.10

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ ssi $\left(f^2 = 0, n \text{ est pair et } \mathrm{rg}(f) = \frac{n}{2}\right)$.

Exercice 24.11

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P : f \in E \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$, et $D : f \in E \mapsto f'$.
1. Montrer que $P, D \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $D \circ P$, $P \circ D$.
2. Déterminer les noyaux de $Id - D$ et $Id - P$.

Exercice 24.12

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n et f, g deux endomorphismes, de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et $E = \ker(f) + \ker(g)$.

Exercice 24.13

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $f \circ g \in GL(E)$.
2. f est surjective, g est injective, et $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(g)$.
3. f est surjective, g est injective, $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g \circ f)$ et $\ker(g \circ f) = \ker(g \circ f \circ g \circ f)$.

Exercice 24.14

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. On définit $C(f) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ f = f \circ v\}$. Montrer que $C(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 24.15

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a.\mathrm{tr}$.

Exercice 24.16

Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Exercice 24.17

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, et A, B, deux polynômes de degré $n + 1$. On définit $\varphi : E \to E$ qui associe à P le reste de la division euclidienne de AP par B.
1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est bijective ssi A et B sont premiers entre eux.