# 12 Structures algébriques

**Exercice 12.1**

Soit $E$ un ensemble. Étudier la loi $\star$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A \star B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

**Exercice 12.2**

Soit $G$ un groupe, on note $\varphi : x \in G \mapsto x^{-1} \in G$. Montrer que $\varphi$ est un morphisme de groupes *ssi* $G$ est abélien.

**Exercice 12.3**

Soit $G$ un groupe, on définit pour tout $a \in G$, $\varphi_a : x \in G \mapsto axa^{-1} \in G$.
1. Montrer que $\varphi_a$ est un automorphisme de groupes.
2. Montrer que $a \in G \mapsto \varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes, déterminer son noyau.

**Exercice 12.4**

Montrer que $(-1, 1)$ muni de $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est un groupe abélien.

**Exercice 12.5**

Soit $G$ un groupe d'ordre pair, montrez qu'il existe un élément $x$ de $G \setminus \{e\}$ tel que $x^2 = e$, où on a noté $e$ l'élément neutre de $G$.

**Exercice 12.6**

Soit $H$ et $K$ deux sous-groupes de $G$, un groupe. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $G$ *ssi* $H \subset K$ ou $K \subset H$.

**Exercice 12.7**

Montrer que $H \subset \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ *ssi* il existe $n \geq 0$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

**Exercice 12.8**

Soit $x$ un élément nilpotent d'un anneau $A$. Montrer que $1 - x$ est inversible et calculer son inverse. Montrer que la somme et le produit (com.) de deux nilpotents l'est.

**Exercice 12.9**

Soit $(G, .)$ un groupe et $A, B$ deux sous-groupes de $G$. On note $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $AB$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $AB = BA$.

**Exercice 12.10**

Soit $f$ un morphisme non constant d'un groupe $(G, .)$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.

**Exercice 12.11**

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau. À l'aide de la norme, caractériser $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$.