

14 Arithmétique

Exercice 14.1 (Théorème de Wilson)

Soit $p \geq 2$. Montrer que : $(p-1)! \equiv -1(p)$ implique que p est premier.

Exercice 14.2 (Petit théorème de Fermat)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p-1$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a(p)$.

Exercice 14.3

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{Z}^2 .

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1. $2x + 5y = 3$ | 3. $162x + 207y = 27$ |
| 2. $323x - 391y = 612$ | 4. $221x + 247y = 15$ |

Exercice 14.4

J'ai une pile de livres. Lorsque je les range par 10, il m'en reste 3. Lorsque je les range par 17, il m'en reste 2. Quel est le nombre minimum de livres que je possède ?

Exercice 14.5

Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Q} .

Exercice 14.6

1. Soit a et b deux entiers non nuls premiers entre eux. Démontrer que a^2 et $b^2 - a^2$ sont premiers entre eux.
2. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $\sqrt{\frac{n}{n+2}}$ est irrationnel.

Exercice 14.7

Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que leur produit ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont deux carrés parfaits.

Exercice 14.8

Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Exercice 14.9

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

Exercice 14.10

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = x - y \\ \text{PPCM}(x, y) = 72 \end{cases}$$