2 Calcul algébrique

Exercice 2.1

Calculer les sommes et produits suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \sum_{k=0}^{n} k.k! \qquad \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right),\ a \in]0, 2\pi[$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} 1 \qquad \sum_{1\le i,j\le n} ij \qquad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} \qquad \prod_{k=1}^{n} 2^{1/k(k+1)} \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

$$\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) \qquad \sum_{1\le i,j\le n} \max(i,j) \qquad \sum_{1\le i,j\le n} |i-j| \qquad \sum_{1\le i<j\le n} \frac{i}{j} \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos(a))^k \cos(ka) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kb),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2.2

Montrer que $\forall n \ge 1,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)! \ge ((n+1)!)^n$.

Exercice 2.3

Soient n, p des entiers vérifiant $0 \le p \le n$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 2.4

Soient n, r, et s des entiers vérifiant $n \le r+s$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{p+q=n} \binom{r}{p}\binom{s}{q} = \binom{r+s}{n}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2.5

Soit n un entier naturel non nul et $0 \le p \le n$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

Exercice 2.6

Soit $p \ge 1$. Démontrer que $p!$ divise tout produit de p entiers naturels consécutifs.

Exercice 2.7

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \ge \frac{n}{4}$.

Exercice 2.8

Soit $n \geq 1$, et $x_1, \ldots, x_n$ des réels vérifiant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = 1$.

Exercice 2.9

Soient n et p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 2.10

Résoudre l'équation suivante pour $n \geq 3$: $\displaystyle\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

Exercice 2.11

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$, puis sur I.

1. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$.
2. $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$.
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$.
4. $\cos(2x) = \cos^2(x)$, $I = [0, 2\pi]$.
5. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$.
6. $\cos(nx) = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.
7. $|\cos(nx)| = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
8. $\sin(x) = \tan(x)$, $I = [0, 2\pi]$.
9. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$, $I = [0, 2\pi]$.
10. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2, I = [-\pi, \pi]$.

Exercice 2.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$.

Exercice 2.13

Résoudre dans I les inégalités suivantes.

1. $\cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$.
2. $\cos^2(x) \geq \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$.

Exercice 2.14

Soients $x, y \in \mathbb{R}$ avec $0 < x \leq y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (géométrique), et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ (harmonique). Montrer que : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Exercice 2.15 (Bernoulli)

Montrer que, pour tout a réel positif, et n entier naturel, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 2.16

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.