17 Convexité

Exercice 17.1 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

Soient $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

1. Montrer que pour $(x,y) \in [1,+\infty[^2$, $xy \leq \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$.
2. En déduire que $\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$$

2. En déduire que $\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$$

Exercice 17.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall(x,y) \in I^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$
Montrer que f est convexe.

Exercice 17.3

Soit $f : I \to J$ convexe et strictement monotone. Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 17.4

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ convexes. Les fonctions $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont-elles convexes ?

Exercice 17.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 17.6 (Inégalité de Jensen intégrale)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction convexe continue et $g : [a,b] \to I$, continue. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\mathrm{d}t.$$

Exercice 17.7

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $f \circ g$ est convexe. Cas général ?

Exercice 17.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe qui présente en $a \in I$ un minimum local. Montrer que f présente en a un minimum global.

Exercice 17.9

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

Exercice 17.10

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.
3. Montrer que pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$, on a :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 17.11 (Théorème de Gauss-Lucas)

Soit $n \geq 1$. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Soit $Z(P) = \{z_1, \dots, z_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de P. On note α_k la multiplicité de la racine z_k.
1. Rappeler la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P .
2. Soit z une racine de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j(z-z_j)}{|z-z_j|^2} = 0.$$

En déduire que $Z(P') \subset C(Z(P))$.

Exercice 17.12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on appelle épigraphe de f, $\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, \mid f(x) \leq y\}$. Montrer que f est convexe *ssi* $\mathcal{E}_f$ est un ensemble convexe.