

23 Dénombrement

Exercice 23.1

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Exercice 23.2

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Déterminer le nombre :

1. de partitions de E .
2. de recouvrements de E .

Exercice 23.3

Soit E un ensemble à n éléments, ($n \geq 1$). Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 23.4

Soit E un ensemble à n éléments, ($n \geq 1$). Calculer

$$S_1 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{card}(X \cap Y) \text{ et } S_2 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{card}(X \cup Y)$$

Exercice 23.5 (Formule de Vandermonde)

Soient a, b, n des entiers avec $n \leq a + b$, montrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Exercice 23.6 (Formule de Pascal généralisée)

Soient n, p des entiers naturels, tels que $0 \leq n \leq p$. Montrer que $\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.

Exercice 23.7

1. De combien de façons peut-on ranger dix chemises différentes dans sept tiroirs ?
2. De combien de façons peut-on ranger trois voitures sur cinq places de parking ?
3. De combien de façons peut-on distribuer dix places de théâtre à dix personnes ?
4. Combien peut-on former de nombres différents de huit chiffres avec cinq 1 et trois 2 ?

Exercice 23.8

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ÉLÈVE ? Même question en effaçant les accents ?
2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHÉMATIQUES ?

Exercice 23.9

On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

1. Combien peut-on former de piles différentes ?
2. Dans combien de ces dispositions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au-dessus de la pile ?

Exercice 23.10

Depuis le 15 avril 2009, les plaques d'immatriculation des véhicules en France sont composées d'un bloc de 2 lettres suivi d'un bloc de 3 chiffres, suivi d'un second bloc de 2 lettres.

1. Combien existe-t-il d'immatriculations possibles sachant que les lettres I, O, U sont interdites ainsi que les séries SS et WW du bloc de gauche et la série SS du bloc de droite ?
2. Combien d'entre elles sont composées de symboles (chiffres et lettres) distincts ?

Exercice 23.11

Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 sont musiciens et 453 ne font ni sport ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Exercice 23.12

Une urne contient 20 boules numérotées, dont 12 sont blanches et 8 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules.
 - a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de tirages comportant 3 boules blanches et 2 noires ?
 - c. Combien y a-t-il de tirages comportant des boules de couleurs différentes ?
2. On tire successivement 5 boules, avec remise.
 - a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de tirages comportant 3 boules blanches et 2 boules noires ?

Exercice 23.13

On tire sans remise 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. On appelle "main" un tel tirage, pour lequel on ne tient pas compte de l'ordre.

1. Quel est le nombre total de mains ?
2. Dénombrer l'ensemble des mains contenant un seul roi.
3. Dénombrer l'ensemble des mains contenant exactement 2 trèfles dont la dame de trèfle.
4. Dénombrer l'ensemble des mains contenant au moins un roi.
5. Dénombrer l'ensemble des mains contenant un seul roi et un seul cœur.
6. Dénombrer l'ensemble des mains contenant un seul roi ou un seul cœur.

Exercice 23.14

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur, on appelle ces cinq cartes une "main". L'ordre des cartes est As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Il y a donc 13 hauteurs pour chacune des 4 couleurs.

1. Combien de mains différentes peut-il recevoir ?
2. Combien contiennent un carré (4 cartes de la même hauteur) ?
3. Combien contiennent au moins un trèfle ?
4. Combien contiennent un brelan d'as (3 as exactement) ?
5. Combien contiennent un full (un brelan et une paire) ?
6. Combien contiennent une double paire (2 cartes d'une même hauteur, et 2 autres cartes de même hauteur sans carré ni full) ?
7. Combien contiennent exactement un roi et un cœur ?
8. Combien contiennent une couleur (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas) ?
9. Combien contiennent une quinte (5 cartes qui se suivent, sans être de la même couleur) ?