15 Dérivabilité

Exercice 15.1

En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Exercice 15.2

Soit $P_n(x) = (x^2-1)^n$. Calculer la dérivée $n-$ième de la fonction polynomiale P_n. Quel est le terme de plus haut degré de $P_n^{(n)}$?

Exercice 15.3

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, où $a > 0$, continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et vérifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 15.4

Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x+f(y))$.

Exercice 15.5

Soit f une application n fois dérivable sur un intervalle I. Calculer la dérivée n-ième de $g_n : x \mapsto x^{n-1}f(\frac{1}{x})$.

Exercice 15.6 (Série harmonique)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$.
2. On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $U_n \geq \ln(n+1)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
3. On pose pour $n \geq 1$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour $n \geq 2$, $\ln(2 - \frac{1}{n+1}) < V_n < \ln(2)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 15.7

Montrer que la dérivée d'un polynôme réel, scindé, est scindé.

Exercice 15.8 (Taylor-Lagrange)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 15.9 (Kolmogorov)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Montrer que pour tout réel x, $|f'(x)| \leq \sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 15.10

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 15.11

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 15.12

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Exercice 15.13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la déterminer.

Exercice 15.14 (Point fixe contractant)

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $k \in (0,1)$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $|f'(x)| \leq k$.
1. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Démontrer que ce point fixe est unique. On le note γ.
3. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que (u_n) converge vers γ.

Exercice 15.15 (Méthode de Newton)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, et que f' et f'' sont à valeurs strictement positives et $f(a) < 0 < f(b)$.
1. Montrer que f s'annule une seule fois. On note c cet unique zéro.
2. On considère (x_n) la suite définie par $x_0 = b$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Démontrer que la suite est bien définie et converge vers c.