30 Déterminants

Exercice 30.1

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 30.2

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 30.3

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 30.4

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$.

Exercice 30.5

Soient a, b, c, d des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \|a\|^2 & (a|b) & (a|c) & (a|d) \\ (b|a) & \|b\|^2 & (b|c) & (b|d) \\ (c|a) & (c|b) & \|c\|^2 & (c|d) \\ (d|a) & (d|b) & (d|c) & \|d\|^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 30.6

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$.

Exercice 30.7 (Déterminant de Hurwitz)

Calculer le déterminant de la matrice $(\mathrm{PGCD}(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 30.8 (Déterminant de Cauchy)

Pour $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, on considère $a_i, a_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 30.9

Calculer le déterminant de la matrice $(i^j)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 30.10 (Déterminant circulant)

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 30.11

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 30.12

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$.

Exercice 30.13

Calculer le déterminant $D(m,p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \cdots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}$.

Exercice 30.14

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

Exercice 30.15

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30.16

Soient n et p des entiers avec $p < n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de AB.

Exercice 30.17

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires. On note $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ pour que $(u_i + s)_{1\leq i\leq n}$ soit libre.

Exercice 30.18

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 30.19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\det(A)$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 30.20

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 30.21

Montrer qu'un déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 30.22

Soient A et B deux matrices de types respectifs (n,p) et (p,n), avec $n \neq p$. Montrer que l'un au moins des déterminants $\det(AB)$ ou $\det(BA)$ est nul.

Exercice 30.23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 30.24

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.