21 Dimension des espaces vectoriels

Exercice 21.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Exercice 21.2

Pour quelles valeurs du paramètre réel t la famille $((1, t), (t, 3))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 21.3

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 21.4

Soit $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 6X + 5$.
1. Déterminer la multiplicité de la racine 1 de P.
2. En déduire une décomposition de P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((X-1)^4, (X-1)^3, (X-1)^2, (X-1), 1)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 21.5

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(\alpha) = 0\}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\mathcal{B} = \left((X-\alpha)X^k\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ? Donner les coordonnées de $(X-\alpha)^n$ dans cette base.

Exercice 21.6

Dans $E = \mathbb{R}^4$, posons $F = \{(x, y, z, t) \in E | x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a), a \in \mathbb{R}\}$.
1. Démontrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E en somme directe.
2. Déterminer la dimension de F et celle de G.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.
4. Trouver l'unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $(1, 2, 3, 4) = u_F + u_G$.

Exercice 21.7

Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose, pour $k = 1, \ldots, n$, $L_k = \dfrac{\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(X - \alpha_i)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(\alpha_k - \alpha_i)}$.
1. Démontrer que $(L_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées d'un élément $P \in E$ dans cette base.

Exercice 21.8

Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 21.9

Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un sev. Dimension ? Base ?