# 9 Équations différentielles linéaires

**Exercice 9.1**

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

1. $x\ln(x)y' + y = x$ sur $I = ]1, +\infty[$.
2. $xy' + 3y = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $I = ]0, \infty[$.
3. $(1-x)^2 y' = (2-x)y$ sur $I = ]-\infty, 1[$.
4. $x(xy' + y - x) = 1$ sur $I = ]-\infty, 0[$.
5. $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $I = ]0, \pi[$.
6. $y' + y = e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

**Exercice 9.2**

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'E.D.O. $y' + y\tanh(x) = 0$ prenant la valeur 1 en 0.

**Exercice 9.3**

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles $I$ suivants : $I = ]1, +\infty[$, $I = ]-1, 1[$, $I = ]-1, +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$.

**Exercice 9.4**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + 2y = \cos(x)\cosh(x)$.
2. $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$
3. $y'' - 2y' + y = \cosh(x)$.
4. $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x\sin(x)$, pour $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

**Exercice 9.5**

Soit $a$ un réel non nul. Soit $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période $T$.

**Exercice 9.6**

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

**Exercice 9.7**

Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra introduire le changement de variables $z(t) = y(e^t)$.
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$. On pourra introduire $z(t) = y(t)t$.

**Exercice 9.8**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

**Exercice 9.9**

L'accroissement de la population $P$ d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?