5 Théorie des ensembles

Exercice 5.1

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 5.2

Soit E un ensemble et f une application de E dans E, vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective *ssi* f est surjective.

Exercice 5.3

Soient $f : E \to F$, $g : E \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

Exercice 5.4

Soit $f : E \to F$ une application : Montrer que
1. f est injective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$.
2. f est surjective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$.
3. En déduire : il existe une injection de E dans F si et seulement s'il existe une surjection de F dans E.

Exercice 5.5

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
1. f est injective ssi $\left(\forall g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h\right)$.
2. f est surjective ssi $\left(\forall g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h\right)$.

Exercice 5.6

Soit E un ensemble non vide. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de E sur $P(E)$.

Exercice 5.7

Soit $f : E \to E$.
Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 5.8

Soient A, B deux parties non vides d'un ensemble E. Soit $f : P(E) \to P(A) \times P(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
1. Montrer : f injective ssi $A \cup B = E$.
2. Montrer : f surjective ssi $A \cap B = \emptyset$.
3. Quand f est bijective, déterminer f^{-1}.

Exercice 5.9

Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 5.10

Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F.
1. Montrer que $\forall (A, B) \in P(F)^2, f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in P(F)^2, f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Montrer que $\forall (A, B) \in P(E)^2, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. Montrer que l'assertion : $\forall (A, B) \in P(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est fausse en général.
5. Montrer que f est injective ssi $\forall (A, B) \in P(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 5.11

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$ et $g(n) = \left\{ \begin{array}{l} n - 1 \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5.12

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{1 + ix}{1 - ix}$.
1. Montrer que f est bien définie.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.13

Soit x, y réels. On définit $x\mathcal{R}y$ ssi $xe^y = ye^x$.
1. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Exercice 5.14

Soit x, y réels. On définit $x\mathcal{R}y$ ssi $x^2 - y^2 = x - y$.
1. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer ses classes d'équivalence.