20 Espaces vectoriels

Exercice 20.1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?
1. $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
2. $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$
3. $\{f \in E, f \geq 0\}$
4. $\{f \in E, \forall x \in E,\ f(x) = f(1-x)\}$
5. $\{f \in E, f$ polynôme de degré $4\}$
6. $\{f \in E, f$ polynôme de degré $\leq 4\}$

Exercice 20.2

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
1. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 = 0\}$
2. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 = 1\}$
3. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 = x_2\}$
4. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1.x_2 = 0\}$
5. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$

Exercice 20.3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 20.4

A, B, C sont des sous-espaces vectoriels de E tels que :
1. $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.
2. $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que B = C.

Exercice 20.5

Soient A, B, C, D quatre sous-espaces de E tels que $E = A \bigoplus B = C \bigoplus D$. On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 20.6

Montrer que la famille $a = (9, -3, 7)$, $b = (1, 8, 8)$, $c = (5, -5, 1)$ est liée.

Exercice 20.7

Peut-on déterminer λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que le vecteur $u = (-2, \lambda, \mu, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (1, -1, 1, 2)$ et $b = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 20.8

Montrer que $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

Exercice 20.9

Dans l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que la famille de fonctions $(f_\lambda : x \mapsto \exp(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre. Même question avec $(f_\lambda : x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$.

Exercice 20.10

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $f_k : x \mapsto |x-k|$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 20.11

Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$, non constants, premiers entre eux. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_k = A^k B^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ forment une famille libre.

Exercice 20.12

Montrer que dans l'espace vectoriel E de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ formés respectivement des fonctions paires et impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 20.13

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces de E tels que $E = E_1 + E_2$, et soit F_2 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2. Montrer que $E = E_1 \bigoplus F_2$.

Exercice 20.14

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x,y,z,t) \in E,\ x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x,y,z,t) \in E,\ x + z = y + t\}$.
1. Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de V, une base de W et une base de $V \cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

Exercice 20.15

Soient $F = \{(\lambda, \dots, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \bigoplus G$.

Exercice 20.16

Dans $\mathbb{R}^4$, soit E l'ensemble des $u = (x,y,z,t)$ tels que $x+3y-2z-5t = 0$ et $x+2y+z-t = 0$. Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. En donner la dimension et une base.