6 Étude de fonctions

Exercice 6.1

Mener l'étude complète des fonctions suivantes :

$$g(x) = x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{x+1} \qquad h(x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad i(x) = x^x$$

Exercice 6.2

Montrer que, pour tous réels a, b, c, on a : $b^2c^2 + c^2a^2 + b^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.
Démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \geq 0,\ (x-2)e^x + x + 2 \geq 0$.

Exercice 6.3

Résoudre $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$.

Exercice 6.4

Simplifier la somme $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

Exercice 6.5

Calculer la derivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

Exercice 6.6

Démontrer l'inégalité : $\forall x > 0,\ x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 6.7

Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = a.$$

Exercice 6.8

Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

Exercice 6.9

Démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.
En déduire la limite de $u_n = \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{np}, p \geq 2, p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.10

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels de $[0, 1]$. Démontrer que : $\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$.