7 Étude de fonctions (2)

Exercice 7.1

Résoudre les équations suivantes :

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{9} \qquad \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x).$$

Exercice 7.2

Montrer que, pout tout réel x non nul, $\tanh(x) = \dfrac{2}{\tanh(2x)} - \dfrac{1}{\tanh(x)}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} 2^p \tanh(2^p x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7.3

Montrer les égalités suivantes :

1. $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)$.
2. $2\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{8}\right)$.
3. $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 7.4

Soient f et g, définies par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], g(x) = \sin(x)$.
1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'application $f \circ g$. En déduire f en fonction de g^{-1}, donner une expression simplifiée de f, puis représenter f graphiquement.
3. Mêmes questions où $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, g(x) = \tan(x)$.

Exercice 7.5

1. Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
2. Résoudre $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \arctan(3x)$.

Exercice 7.6

Étudier les applications suivantes en cherchant à transformer leurs expressions

1. $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}\right)$.
2. $g(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
3. $h(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2}) - \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

Exercice 7.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sinh(2+x) + \sinh(2+2x) + \cdots + \sinh(2+100x) = 0$.