

8 Calcul intégral

Exercice 8.1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \sin^5(x) \cos^3(x) dx \quad \int x \arcsin(x) dx \quad \int x \arctan(x) dx \quad \int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} \text{ (DES)}$$

$$\int \frac{dx}{\tan(x)} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4} dx \text{ (DES)} \quad \int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$\int_{a+1}^{a+2} \frac{dx}{\cosh(x) - \cosh(a)}, a \neq 0 \quad \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \quad \int e^x \sin(x) dx \quad \int x \ln(x) dx$$

$$\int (x^2 - 3x + 1)e^x dx \quad \int x^n \ln(x) dx \quad \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} \quad \int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln(x) dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \quad \int_{-1}^1 \arctan(e^x) dx \quad \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x) dx$$

Exercice 8.2

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$.

Exercice 8.3

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, puis trouver un DL à l'ordre 2 en I_n .

Exercice 8.4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt.$$

Exercice 8.5

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui est vérifie $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx. \text{ En déduire la valeur de : } \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx.$$

Exercice 8.6

Calculer $I_n = \int_0^n \lfloor x \rfloor dx$.

Exercice 8.7

Calculer $I = \int_{-1}^2 (|x-1| - |3x+2|) dx$.