13 Limites et continuité

Exercice 13.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fontion T périodique, avec $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$. Montrer que f est constante.

Exercice 13.2

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec g périodique, $f + g$ monotone, et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Montrer que g est constante.

Exercice 13.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. On suppose que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Exercice 13.4

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en x_0. Montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues en x_0.

Exercice 13.5

Soient f, g continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles avec $f([a, b]) \subset g([a, b])$. Montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 13.6

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
- L'image de tout rationnel est un irrationnel.
- L'image de tout irrationnel est un rationnel.

Exercice 13.7

Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon.

Exercice 13.8

Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Exercice 13.9

Trouver les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 13.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0 et en 1, telle que, pour tout réel x, on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante.

Exercice 13.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(2x) = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 13.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, et $f(1) = a \in \mathbb{R}_+^*$.
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $f(x)$ pour x réel.

Exercice 13.13

Soit K un segment et f une application définie sur K telle que $f(K) \subset K$ et $\forall x, y \in K$, $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 13.14

Soit $n \geq 3$.
1. Montrer que l'équation $x^n = e^x$ admet une unique solution x_n sur $[0, n]$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13.15

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.
1. Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $1/2$.