27 Matrices et applications linéaires

Exercice 27.1

Donner la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ sachant que $(1, 2, -1) \in \ker(f)$, que $f(e_1) = (2, 1, 1)$ et que $f(e_2) = (3, 0, -1)$.

Exercice 27.2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 27.3

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $AB = 0$ est nulle et que $A + B$ est inversible. Montrer que $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) = n$.

Exercice 27.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 27.5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, avec $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 27.6

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 27.7

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 27.8

Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = I_n$?

Exercice 27.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, 0)$, $f_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 27.10

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = MA$. Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

Exercice 27.11

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.