16 Calcul matriciel

Exercice 16.1

Pour tous indices i, j, k, l de $\{1, \cdots, n\}$, calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.

Exercice 16.2

Pour tout réel t, on pose : $A(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2/2 & -t^2/2 & t \\ t^2/2 & 1-t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(s)A(t)$, puis $(A(t) - I_3)^3$.
2. En déduire $A(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, et A^{-1}.

Exercice 16.4

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16.5

On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, où n est un entier strictement positif. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $a_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ et $b_{i,j} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$. Calculer les produits A^2, B^2, AB. En déduire A^{-1}.

Exercice 16.6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

Exercice 16.7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

Exercice 16.8

Soit $A = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, strictement triangulaire supérieure. Montrer que $A^n = 0$.

Exercice 16.10

Montrer que l'égalité $AB - BA = I_n$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 16.11

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$. Montrer que les matrices A et B sont égales.

Exercice 16.12 (Lemme de Hadamard)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1 \dots, n\}\,,\ |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 16.13

Montrer que M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M est de la forme λI_n, où λ est un scalaire quelconque.

Exercice 16.14

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$. On suppose que A et C sont inversibles, montrer que M l'est, et exprimer M^{-1} comme matrice par blocs.

Exercice 16.15

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.