3 Nombres complexes

Exercice 3.1

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos(a))^k \cos(ka) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kb),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3.2

Calculer $(1+i)(\sqrt{3}+i)$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3.3

Simplifier le nombre complexe $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$.

Même question avec $z = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 3.4

Calculer la forme polaire du complexe $z = 1 + \sqrt{2}.\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$.

Exercice 3.5

Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel.

Exercice 3.6

Résoudre l'équation $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$, où $n \geq 1$.

Exercice 3.7

Calculer les sommes suivantes :

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$T = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$U = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$$

Exercice 3.8

Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} (-1)^k \text{ et } T_n = \sum_{\geq 0} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

Exercice 3.9

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré n, on note $P^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$.
1. Montrer que, pour tout complexe z non nul, $P^*(z) = z^n \overline{P(\bar{z}^{-1})}$.
2. Montrer que P stabilise $\mathbb{U}$ ssi $P = aX^n$, où $a \in \mathbb{U}$.

Exercice 3.10

Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. On pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :
1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.
3. $Z \in \mathbb{R}$.
4. $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3.11

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Montrer que ;

$$z \in \mathbb{U} - \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ z = \frac{1+ix}{1-ix}.$$

Exercice 3.12

Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z, $1-z$ et $1/z$ ait le même module.

Exercice 3.13

Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 3.14

Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 3.15

Linéariser $\cos^5(\theta)$, $\sin^4(\theta)$.