10 Nombres réels

Exercice 10.1

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 10.2

Soit x un réel. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \cdots + \lfloor xn \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 10.3

Soit x un réel positif et n un entier naturel.
1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n, 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n, 0 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Impairs ?

Exercice 10.4

Soit x un réel et n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 10.5

Soit n un entier naturel non nul.
1. Montrer qu'il existe a_n, b_n des entiers naturels non nuls tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

Exercice 10.6

Soit n un entier naturel non nul, x un réel. Montrer que : $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10.7

Soit x un réel. Montrer que :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

Plus généralement, montrer que $\forall n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 10.8

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2000} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 10.9

Soient a et b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

$$A = \{a + bn, n \in \mathbb{N}\}\,,\ B = \{a + b(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}\,,\ C = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

.

$$D = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},\ E = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 10.10

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\right\},\ B = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\},\ C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}, p, n \geq 1\right\}.$$

Exercice 10.11

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{\frac{n}{nm+1}, n, m \geq 1\right\},\ B = \left\{\frac{n}{nm+1}, n, m \geq 0\right\}.$$

Exercice 10.12

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Démontrer que A est majorée, B est minorée, et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 10.13

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, et bornées, et $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(A + x) = \sup(A) + x$.

Exercice 10.14

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, on note $B = \{|x - y|, x, y \in A\}$. Montrer que B est bornée, calculer $\inf(B)$. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 10.15

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$.
1. Montrer que E admet une borne supérieure, b.
2. Prouver que $f(b) = b$.