18 Polynômes

Exercice 18.1

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, montrer que P' est scindé. Réciproque ?

Exercice 18.2

Montrer l'équivalence suivante : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P \geq 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 18.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $A_n = a_n X^{n+1} + b_n X^n + 1$. Déterminer a_n, b_n pour que A_n soit divisible par $(X-1)^2$. Quel est alors le quotient de la division ?

Exercice 18.4

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A_n = (X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$, et $B = X^2 + 1$. Quel est le reste dans la division de A par B ?

Exercice 18.5

Soient m, n, p, q des entiers naturels. Montrer que $B = X^3 + X^2 + X + 1$ divise $A = X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

Exercice 18.6

On pose $A_n = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$. Effectuer la division de A_n par $B = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$.

Exercice 18.7

Montrer que le PGCD de $X^n - 1$ et $X^p - 1$ est $X^{\mathrm{pgcd}(n,p)} - 1$.

Exercice 18.8

Trouver les polynômes, U, V tels que $(X-1)^3 U + (X+1)^2 V = 1$.

Exercice 18.9

Résoudre le système $= \begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Exercice 18.10

Résoudre le système $= \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$

Exercice 18.11

On considère l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$. Résoudre (E) sachant que la somme de deux des solutions vaut 2.

Exercice 18.12

Calculer $a^4 + b^4 + c^4$ où a, b, c sont les racines de $P = X^3 + pX + q$.

Exercice 18.13

Calculer $\sum \left(\dfrac{\alpha+2}{2\alpha+5}\right)^3$, où α décrit les racines de $x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$.

Exercice 18.14

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Exercice 18.15

Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 18.16

1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et a un réel. Donner le développement de $(\cos(a) + i\sin(a))^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
3. Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}(x) < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}$.
4. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

Exercice 18.17

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice 18.18

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 18.19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 21z + 8 = 0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 18.20

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = P(1-X)$.

Exercice 18.21

Soit $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que $P = (X - a_1)\ldots(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 18.22

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Soit n le degré de P et $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 0$.

Exercice 18.23

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
1. $X^4 + 1$ 2. $X^8 - 1$ 3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 18.24

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Démontrer que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ si et seulement si $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 18.25

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$.

Exercice 18.26

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :
1. $P'^2 = 4P$
2. $P \circ P = P$.

Exercice 18.27

Déterminer les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 et tels que $P'|P$.

Exercice 18.28

Montrer que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, alors $P + Q$ et PQ le sont aussi.

Exercice 18.29

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \ldots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 18.30 (Théorème de Gauss-Lucas)

Soit $n \geq 1$. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Soit $Z(P) = \{z_1, \ldots, z_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de P. On note α_k la multiplicité de la racine z_k.
1. Rappeler la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P .
2. Soit z une racine de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j(z - z_j)}{|z - z_j|^2} = 0$. En déduire que $Z(P') \subset C(Z(P))$.