

25 Probabilités

Exercice 25.1

Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ?

Exercice 25.2

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 25.3

Une maladie atteint une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si elle est effectivement présente. Mais on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque son test est positif ?

Exercice 25.4

On dispose de 100 dés dont 25 sont truqués. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

Exercice 25.5

On considère trois urnes :
 U_1 : deux boules blanches et trois rouges ;
 U_2 : deux boules vertes et quatre blanches ;
 U_3 : cinq boules noires et deux rouges. On tire une boule de U_1 et on la met dans U_2 . On tire une boule de U_2 et on la met dans U_3 . Enfin on tire une boule dans U_3 . Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de couleurs différentes ?

Exercice 25.6

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?

Exercice 25.7

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .
3. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 25.8

Un QCM propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 25.9

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $2/3$. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $1/2$. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

Exercice 25.10

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'état de la particule au temps $n + 1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

1. si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n + 1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
2. si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n + 1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On note A_n l'évènement : "au temps n , la particule est à l'état 1", et T_n l'évènement : "la première fois que la particule est à l'état 1 est au temps n ". On note enfin $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $p_0 = \frac{1}{2}$.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis p_n en fonction de n .
2. Calculer $\mathbb{P}(T_n)$.

Exercice 25.11

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.

Exercice 25.12

Deux entreprises produisent des "langues de belle-mère" en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !

1. Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?
2. Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?