28 Probabilités - Variables aléatoires

Exercice 28.1

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face. Déterminer la loi de X, calculer son espérance. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 28.2

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :
Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache. On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = X_n/n$.
1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - 0.85^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln(x)$, pour $a = \ln(0.85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $\mathbb{E}[Y_n] < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée.

Exercice 28.3 (Une loi géométrique finie ...)

Une entreprise souhaite recrute un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in\,]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le $k-$ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 28.4

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 28.5

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Exercice 28.6

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

Exercice 28.7

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, \cdots, N\}$. Démontrer que :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 28.8

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)x^k$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

Exercice 28.9

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 7/10, et répondent à une question correctement avec probabilité $0,8$. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?