26 Séries numériques

Exercice 26.1

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_n \left(\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)^{\sinh\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \qquad \sum_n \ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) \qquad \sum_n \frac{1}{1+n(-1)^n}$$

$$\sum_n \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)} \qquad \sum_n n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)} \qquad \sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \sum_n \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$\sum_n \sin((2+\sqrt{3})^n\pi) \qquad \sum_n \sin(\pi e n!) \qquad \sum_n \sin(2\pi e n!) \qquad \sum_n \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

$$\sum_n (-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t \qquad \sum_n \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t \qquad \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \qquad \sum_n \frac{3^n+4n}{5^n-6n^9}$$

$$\sum_n \operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} \qquad \sum_n \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \qquad \sum_n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right),\ a\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 26.2

Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha\ln^\beta(n)}$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Exercice 26.3

Étudier la nature de la série de terme général $1/u_n$ avec $u_n=\sum_{k=1}^n \ln^2(k)$.

Exercice 26.4

On suppose que $u_0\in\mathbb{R}$ et on définit par récurrence,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{e^{-u_n}}{n}.$$

Étudier la nature des séries : $\sum_n u_n \qquad \sum_n (-1)^n u_n$.

Exercice 26.5

Soit $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Montrons que $\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice 26.6

Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n k^{3/2}\right)_{n\geq1}$ converge ssi $\alpha>7/2$.

Exercice 26.7

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} u_n$.
1. Montrer que (u_n) converge.
2. On pose $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$. En remarquant que (v_n) converge ssi $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est une série convergente, montrer que (v_n) converge vers l.
3. Donner un équivalent de (u_n) en fonction de l, et déterminer la nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$.

Exercice 26.8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$ telle que $f(0) \neq 0$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n) \mathrm{d}t.$$

Exercice 26.9

Soit (u_n) une série à termes positifs convergente. Peut-on préciser la nature de la série de terme général $v_n = u_0 u_1 ... u_n$?

Exercice 26.10

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (3k-1)^{1/n}$.

Exercice 26.11 (Si on connait la transformation d'Abel... !)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k)}{k}$. En observant que $(\Sigma_n)_n$ est bornée, montrer que la suite $(S_n)_n$ converge.

Exercice 26.12 (Si on connait le théorème de Césaro... !)

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$. En étudiant $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, étudier la converge de la série de terme général u_n.

Exercice 26.13

Justifier la convergence de la série suivante et calculer la somme : $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + ... + k^2}$.

Exercice 26.14

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{k^3}{k!} \qquad \sum_{k\geq 1} \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}\right).$$

Exercice 26.15 (Formule de Striling)

Soit $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}e^{-n}}{n!}$.
1. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge.
2. En déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} An^n e^{-n}\sqrt{n}$, où $A > 0$.
3. On introduit $I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_n$ décroît, puis que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
4. En déduire une formule explicite de I_n, puis que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
5. Montrer que $A = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 26.16 (Un calcul de $\zeta(2)$)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) := \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \dfrac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)}$.
2. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2], \mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

3. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} xD_{2n}(x)\mathrm{d}x$ sous forme d'une somme. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 26.17 (Un autre calcul de $\zeta(2)$)

1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et a un réel. Donner le développement de $(\cos(a) + i\sin(a))^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
3. Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}(x) < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}$.
4. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).