

# Couplages leçons-développements

## Agrégation externe de Mathématiques

### 1 Algèbre

#### 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- Réciprocité quadratique.
- Théorème de Sylow.
- *Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.*

#### 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
- Théorème de Kronecker.

#### 103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.
- Théorème de Sylow.

#### 104 - Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

- Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
- Théorème de Sylow.
- *Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.*
- *Réciprocité quadratique.*

#### 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
- Isométries du cube et du tétraèdre.
- *Simplicité de  $\mathfrak{A}_n$ .*

#### 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.

- Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.
- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.
- *Étude de  $O(p, q)$ .*

#### 107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples.

#### 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

#### 120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

- Réciprocité quadratique.
- Nombres de Sophie-Germain.
- *Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.*

#### 121 - Nombres premiers. Applications.

- Réciprocité quadratique.
  - Théorème des deux carrés.
  - *Nombres de Sophie-Germain.*
- 122 - Anneaux principaux. Applications.**
- Algorithme de Berlekamp.
  - Théorème des deux carrés.
- 123 - Corps finis. Applications.**
- Réciprocité quadratique.
  - Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini.
  - *Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.*
  - *Algorithme de Berlekamp.*
- 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.**
- Algorithme de Berlekamp.
  - Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini.
- 126 - Exemples d'équations en arithmétique.**
- Réciprocité quadratique.
  - Théorème des deux carrés.
  - *Nombres de Sophie-Germain.*
- 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
  - Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini.
  - *Algorithme de Berlekamp.*
- 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**
- Algorithme de Berlekamp.
  - Nombres de Sophie-Germain.
  - *Décomposition de Dunford effective.*
- 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
  - Théorème de Kronecker.
  - *Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini.*
- 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**
- Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.
  - Décomposition polaire.
  - *Réciprocité quadratique.*
  - *Théorème de réduction de Frobenius.*
  - *L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .*
- 151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**
- Théorème de réduction de Frobenius.

- Algorithme de Berlekamp.
- 152 - Déterminant. Exemples et applications.**
  - Ellipsoïde de John-Loewner.
  - Suite de polygones.
- 153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**
  - Décomposition de Dunford effective.
  - Théorème de réduction de Frobenius.
- 154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**
  - Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.
  - Théorème de réduction de Frobenius.
- 155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
  - Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.
  - Décomposition de Dunford effective.
  - *L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .*
- 156 - Exponentielle de matrices. Applications.**
  - L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
  - Décomposition de Dunford effective.
- 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**
  - Convergence des méthodes itératives.
  - Décomposition de Dunford effective.
- 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**
  - Ellipsoïde de John-Loewner.
  - L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
  - *Algorithme de gradient à pas optimal.*
- 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**
  - Théorème de réduction de Frobenius.
  - Théorème des extrema liés.
- 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**
  - $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.
  - L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
- 161 - Distances et isométries d'un espace affine euclidien.**
  - Isométries du cube et du tétraèdre.
  - $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.
- 162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**
  - Convergence des méthodes itératives.
  - Algorithme de gradient à pas optimal.

**170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**

- Réciprocité quadratique.
- Étude de  $O(p, q)$ .
- *Ellipsoïde de John-Loewner.*

**171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

- Ellipse de John-Loewner
- Étude de  $O(p, q)$ .

**181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.**

- Théorème de Gauss-Lucas et une application.
- Suite de polygones.

**190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

- Réciprocité quadratique.
- Nombre de matrices diagonalisables sur un corps fini.
- *Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini.*

**191 - Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.**

- Isométrie du cube et du tétraèdre.
- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

## 2 Analyse

**201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.**

- Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes.
- Polynômes orthogonaux.
- *Théorème de Weierstrass.*
- *Critère de Weyl.*

**203 - Utilisation de la notion de compacité.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème du point fixe de Brouwer.
- *L'exponentielle est un homéomorphisme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .*
- *Optimisation dans un Hilbert.*
- *Théorème de Weierstrass.*

**204 - Connexité. Exemples et applications.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème du point fixe de Brouwer.
- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

**205 - Espaces complets. Exemples et applications.**

- Théorème de Lax-Milgram.
- Optimisation dans un Hilbert.
- *Théorème de Banach-Steinhaus et une application aux séries de Fourier.*

**207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.**

- Théorème taubérien faible.
- Inversion de Fourier.
- *Polynômes orthogonaux.*
- *Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes.*

**208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications.**

- Théorème de Lax-Milgram.
- Théorème de Banach-Steinhaus et une application aux séries de Fourier.
- *Polynômes orthogonaux.*
- *Optimisation dans un Hilbert.*
- *Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes.*

**209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.**

- Polynômes orthogonaux.
- Théorème de Weierstrass.
- *Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).*
- *Critère de Weyl.*

**213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.**

- Théorème de Lax-Milgram.
- Optimisation dans un Hilbert.
- *Polynômes orthogonaux.*

**214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème du point fixe de Brouwer.
- *Théorème des extrema liés.*

**215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème du point fixe de Brouwer.
- *Théorème des extrema liés.*
- *Théorème de linéarisation de Liapounov.*

**219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

- Méthode du gradient à pas optimal.
- Optimisation dans un Hilbert.
- *Théorème des extrema liés.*
- *Méthode de Newton.*
- *Théorème de Lax-Milgram.*
- *Ellipsoïde de John-Loewner.*

**220 - Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
  - Nombre de zéros d'une équation différentielle linéaire.
  - *Théorème de linéarisation de Liapounov.*
- 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**
- Théorème de linéarisation de Liapounov.
  - Nombre de zéros d'une équation différentielle linéaire.
- 222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.**
- Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).
  - Théorème de Lax-Milgram.
- 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**
- Critère de Weyl.
  - Méthode de Newton.
  - *Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.*
- 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**
- Convergence des méthodes itératives.
  - Méthode du gradient à pas optimal.
  - *Méthode de Newton.*
  - *Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.*
- 228 - Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**
- Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes.
  - Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).
  - *Méthode de Newton.*
  - *Théorème de Weierstrass.*
- 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**
- Optimisation dans un Hilbert.
  - Ellipsoïde de John-Loewner.
  - *Méthode de Newton.*
- 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**
- Théorème taubérien faible.
  - Nombres de Bell.
- 233 - Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.**
- Méthode du gradient à pas optimal.
  - Convergence des méthodes itératives.
- 234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**
- Théorème de représentation des fonctions lipschitziennes.
  - Inversion de Fourier.

- *Polynômes orthogonaux.*
- 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.**
  - Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).
  - Inversion de Fourier.
  - *Formule des compléments.*
  - *Prolongement de la fonction  $\Gamma$ .*
- 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**
  - Inversion de Fourier.
  - Formule des compléments.
- 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**
  - Polynômes orthogonaux.
  - Inversion de Fourier.
  - *Formule des compléments.*
  - *Prolongement de la fonction  $\Gamma$ .*
- 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**
  - Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).
  - Théorème taubérien faible.
  - *Prolongement de la fonction  $\Gamma$ .*
- 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**
  - Nombres de Bell.
  - Théorème taubérien faible.
- 245 - Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.**
  - Polynômes orthogonaux.
  - Formule des compléments.
  - *Prolongement de la fonction  $\Gamma$ .*
- 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.**
  - Équation de la chaleur sur un cercle (avec condition initiale continue).
  - Théorème de Banach-Steinhaus et une application aux séries de Fourier.
- 250 - Transformation de Fourier. Applications.**
  - Inversion de Fourier.
  - Polynômes orthogonaux.
- 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.**
  - Optimisation dans un Hilbert.
  - Ellipsoïde de John-Loewner.
  - *Méthode du gradient à pas optimal.*
- 261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**
  - Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.
  - Inégalité de Hoeffding.

**262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

- Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .
- *Inégalité de Hoeffding.*

**264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

- Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .

**265 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

- Formule des compléments.
- Prolongement de la fonction  $\Gamma$ .
- *Polynômes orthogonaux.*

**266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.**

- Équirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle.
- Inégalité de Hoeffding.

**267 - Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.**

- Formule des compléments.
-